CHAPITRE

3

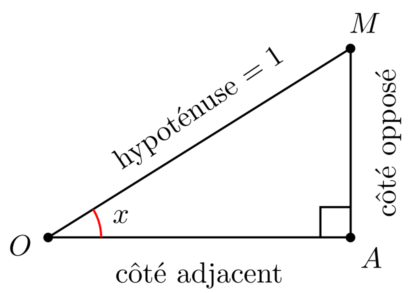
Rappels de Trigonométrie

Sommaire

1 Trigonométrie dans le triangle

En troisième vous avez vu le lien particulier dans un triangle rectangle entre les angles aigus du triangle et certains rapports de ses longueurs de côtés.

Ces rapports de longueurs ont été appelés **cosinus**, **sinus** et **tangente** :



— $\sin x = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AM}{OM}$

— $\cos x = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{OA}{AM}$

— $\tan x = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AM}{OA}$

⚠ `Les désignations « côté adjacent », « côté opposé » dépendent du choix de l'angle aigu.`

Propriété 1.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $0 \leq \cos x \leqslant 1$ et $0 \leq \sin x \leqslant 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Remarque

Grâce à la trigonométrie, il suffit de connaître un angle et une longueur pour retrouver par le calcul tous les autres angles et longueurs du triangle rectangle.

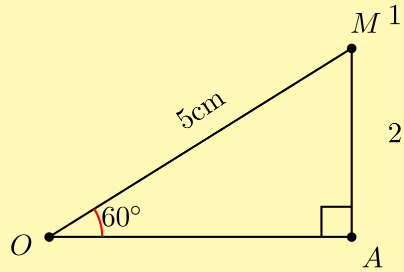
La calculatrice sait nous renvoyer à partir d'une valeur d'angle et du choix d'un rapport trigonométrique (sin, cos, tan) la valeur de ce même rapport.

Méthode (Calcul d'une longueur).

Calculer la longueurs OA dans le triangle OAM rectangle en A.

- Pour calculer OA, il faut choisir la bonne formule trigonométrique.

  Pour cela, regardons les informations :



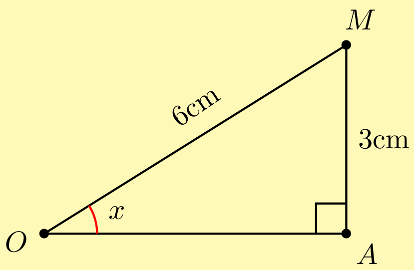
  1. dont nous disposons : un angle et la longueur de l'hypoténuse.
  2. que nous cherchons : le côté adjacent à l'angle.

     Ces trois informations sont réunies dans une seule des formules trigonométriques (à chaque fois). Ici c'est le cosinus.

- On utilise la formule : $\cos(60) = \dfrac{OA}{5} \Longleftrightarrow OA = 5 \times \cos(60) = 2.5$

Méthode (Calcul d'un angle)**.**

Calculer la mesure de $\widehat{MOA}$ dans le triangle OAM rectangle en A.



- Pour calculer $\widehat{MOA}$, il nous faut choisir la bonne formule trigonométrique.

  Pour cela, regardons les informations :

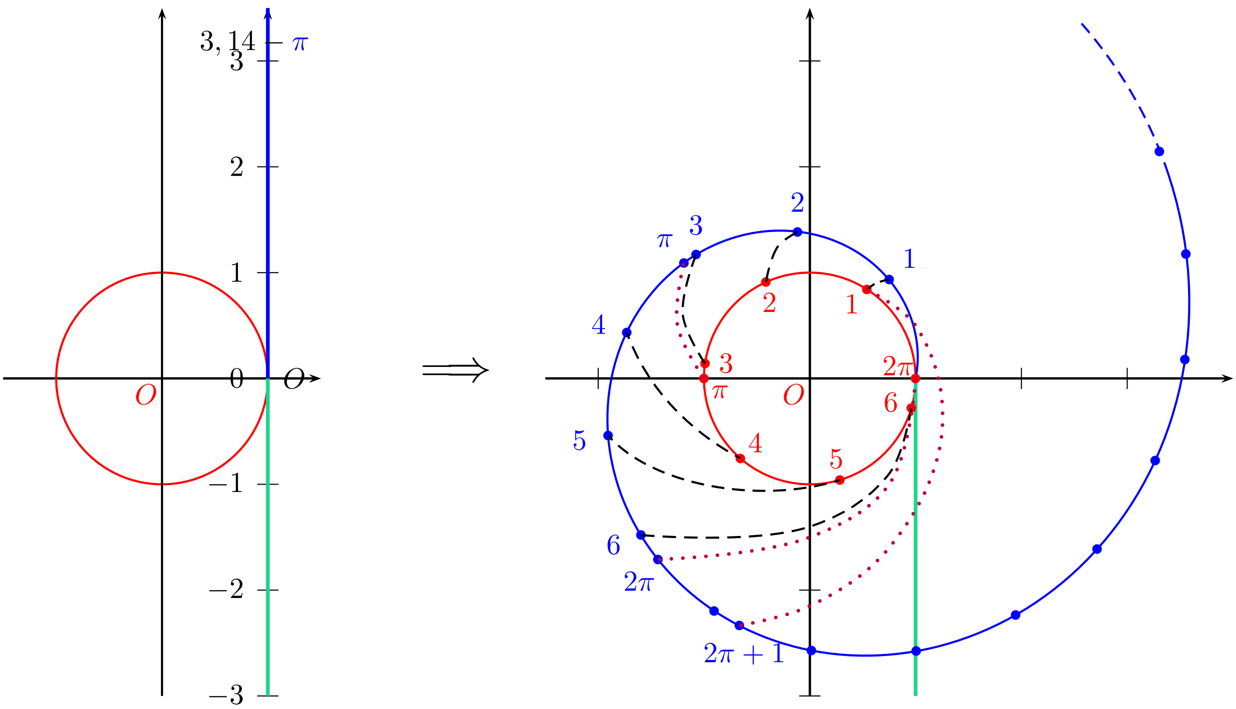
  1. que nous cherchons : un angle aigu.
  2. dont nous disposons : deux longueurs (l'hypoténuse et le côté opposé à l'angle recherché).

  Ces trois informations sont réunies dans une seule des formules trigonométriques (à chaque fois). Ici c'est le sinus.
- On utilise la formule : $\sin \widehat{MOA} = \dfrac{3}{6}$
- Ensuite on utilise sa calculatrice de façon à renvoyer la valeur d'angle dont le rapport sinus vaut $\dfrac{1}{2}$. C'est 30°.

2 Trigonométrie dans le cercle

2.1 Enroulement d'une droite sur le cercle trigonométrique

On se place dans un repère (O, I, J) orthonormal. Afin de lier angle et distance d'arc sur le cercle on va enrouler la droite réelle autour d'un cercle : on considère le cercle de centre 0 de rayon 1, on « colle » l'origine de la droite des réels sur le point de coordonnées $(1; 0)$ et on enroule :



Remarque

— *Le périmètre du cercle unité vaut* $2\pi R = 2\pi$. *Donc, le point d'abscisse* 2π *de la droite des réels vient se « coller » sur le* 0 *d'origine du cercle.*

On peut donc définir une nouvelle unité de mesure : le radian.

Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

— *À chaque point de la droite des réels correspond un unique point sur le cercle, mais inversement, à tout point du cercle correspond une infinité de points sur la droite, tous distincts de* $k \times 2\pi$ *où* k *est un nombre de tours.*

Définition 1.

➤ Un **cercle orienté** est un cercle sur lequel on distingue deux sens de parcours : le sens direct et le sens indirect.

➤ Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le sens direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque

— *Sens direct : sens positif, sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre.*

— *Sens indirect : sens négatif, sens horaire .*

2.2 Sinus et cosinus

Toujours dans le repère (O, I, J), en déplaçant un point M sur le cercle trigonométrique, on remarque que pour lire ses coordonnées on forme un triangle rectangle. Par symétrie axiale, d'axe les abscisses et les ordonnées, on peut étendre les valeurs des rapports trigonométriques trouvés dans les triangles rectangles du premier quart de disque unité aux autres. Ainsi on prolonge les domaines de définition de cosinus, sinus et tangente aux valeurs d'angles réelles.

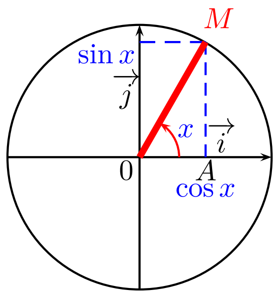
Définition 2.

Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $(\widehat{AOM})$.

➤ Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère (O, I, J).

➤ Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère (O, I, J).

$\cos x$ et $\sin x$ sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère (O, I, J).



On note : $M\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$

Remarque

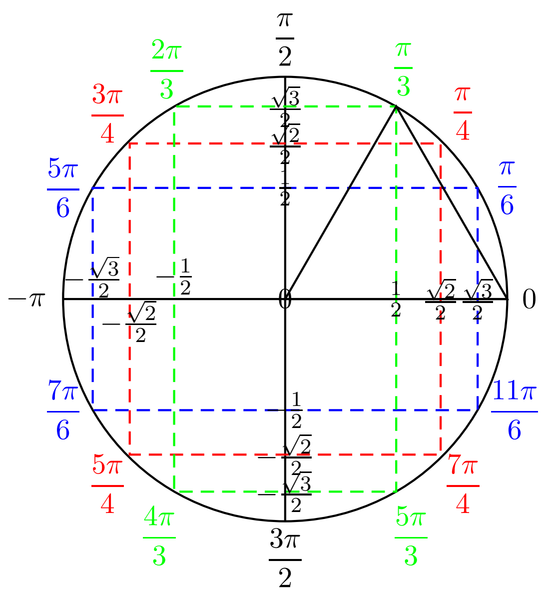
L'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique nous donne la possibilité de mesurer un angle grâce à la portion d'arc qu'il intersecte. Mais l'on a vu qu'un même point possède une infinité de mesures en radian puisque la droite s'enroule infiniment sur le cercle (dans un sens et dans l'autre !). Ces différentes mesurent sont toutes séparées d'un multiple de la longueur du cercle : 2π.
Ainsi pour un point M du cercle trigonométrique l'ensemble des valeurs réelles qui déterminent les coordonnées de M se notent $x[2\pi]$ (on lit « x modulo 2π ») ou $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Pour noter cet ensemble on choisira très souvent comme valeur pour x celle qui est comprise dans $[0; 2\pi]$ voire dans $[-\pi; \pi]$.

Grâce aux définitions et aux propriétés de symétrie, on peut « lire » dans le cercle trigonométrique les propriétés suivantes :

Propriété 2.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
  $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
  $\sin(\pi + x) = -\sin x$

2.2.1 Valeurs particulières importantes à connaître !!!



On peut établir le tableau suivant :

valeur de x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
valeur de x en degrés	0	30	45	60	90	180
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

2.2.2 Formules d'addition

Proposition 1.

Soient a et b des réels alors on a les formules dites d'addition suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Démonstration.

Soient a et b deux nombres réels. Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé. On note A le point tel que $OA = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$.

On note B le point tel que $OB = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = a + b$.

Enfin on note A' le point tel que $OA' = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'}) = a + \frac{\pi}{2}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j} \qquad \overrightarrow{OA'} = \cos(a+\tfrac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(a+\tfrac{\pi}{2})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = \cos(a+b)\vec{i} + \sin(a+b)\vec{j} \qquad \overrightarrow{OA'} = -\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}$$

Or dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$: $\overrightarrow{OB} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$

Donc : $\overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b)\vec{i} + \sin(a)\cos(b)\vec{j} - \sin(a)\sin(b)\vec{i} + \cos(a)\sin(b)\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a))\vec{j}$

Par unicité des coordonnées dans $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on obtient bien :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En remplaçant b par $-b$ et en considérant que : $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$

Ainsi on en déduit facilement les formules mathématiques suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Remarque

On remarquera les cas particuliers des formules d'addition :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

2.3 Tangente

Définition 3.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ alors on définit la tangente de x comme le rapport entre le sinus de x et le cosinus de x. On note :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Voici une interprétation géométrique de la tangente : si l'on considère le point M du cercle trigonométrique de coordoonnées $M\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$ alors la pente (le coefficient directeur) de la droite passant par l'origine du repère et M est $\tan x$.

Propriété 3.

- $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

Proposition 2.

- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \times \tan(b)}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$

Remarque

On remarquera un cas particulier des formules d'addition : $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

valeur de x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
valeur de x en degrés	0	30	45	60	90	180
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini	0

3 Résolution d'équation trigonométriques

Au sens large, les équations trigonométriques sont des équations (c'est à dire des égalités) faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Nous nous intéresserons à trois types d'équations en particulier et chaque fois qu'il faudra résoudre une équation trigonométrique, il faudra s'y ramener.

Définition 4.

On appelle **équation trigonométrique** un des trois types d'équations suivantes :

$\cos(x) = \cos(a)$ $\sin(x) = \sin(a)$ $\tan(x) = \tan(a)$

Proposition 3 (Solutions des équations trigonométriques)**.**

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -a[2\pi]$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi - a[2\pi]$
- $\tan(x) = \tan(a) \iff x = a[\pi]$

Exemple

- $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff x = \frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$
- $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3}[2\pi] = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$
- $\tan(x) = 1 \iff \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff x = \frac{\pi}{4}[\pi]$