

LES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. Les nombres complexes furent introduits au XVII^e siècle par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, dit Tartaglia, et Ludovico Ferrari afin d'exprimer les solutions des équations du troisième degré en toute généralité par les formules de Cardan, en utilisant notamment des nombres de carré négatif, ainsi que les solutions des équations du quatrième degré (méthode de Ferrari).

L'ensemble des sommes et produits de nombres réels et du nombre imaginaire i (les nombres de la forme $a + i.b$) satisfait les propriétés d'une structure de corps commutatif qui contient le corps des réels. Il est appelé corps des nombres complexes et se note \mathbb{C} . Il est muni de l'application module qui généralise la valeur absolue des nombres réels mais ne peut pas être ordonné totalement de façon compatible avec sa structure de corps.

Ce n'est qu'à partir du XIX^e siècle que se développe l'aspect géométrique des nombres complexes, vus comme des éléments ou des transformations du plan, sous l'impulsion de l'abbé Buée et de Jean-Robert Argand (plan d'Argand), puis avec les travaux de Gauss et de Cauchy.

En algèbre, le théorème de d'Alembert-Gauss identifie le degré d'un polynôme complexe non nul au nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Le corps des nombres complexes est donc algébriquement clos. En analyse, l'exponentielle complexe permet de simplifier l'étude des séries de Fourier puis de définir la transformée de Fourier. La branche de l'analyse complexe concerne l'étude des fonctions dérivables au sens complexe, appelées fonctions holomorphes. En physique, les nombres complexes sont utilisés pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques ou les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme ($\text{Re}(e^{i\omega t})$ représentant une onde).

Source :  <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Nombre-complexe.html>

Sommaire

1	Introduction	4
1.1	Le nombre i	4
1.2	L'ensemble des nombres complexes	5
2	Forme algébrique	6
2.1	Définition	6
2.2	Premiers calculs	7
2.3	Représentation géométrique des nombres complexes	7
2.4	Conjugué d'un complexe	9
2.5	Inverse d'un complexe	10
3	Forme trigonométrique	10
3.1	Module d'un nombre complexe	10
3.2	Argument d'un complexe non nul	11
3.2.1	Définitions	11
3.3	Écriture trigonométrique	12
4	Forme exponentielle	14
4.1	Définitions	15
4.2	Règles de calcul en notation exponentielle	16
5	Interprétation géométrique	16
5.1	Addition de deux complexes	16
5.2	Transformations géométriques	17
5.3	Multiplication, quotient de deux complexes	17
6	Formules de DE MOIVRE et d'EULER	18
6.1	Formule de DE MOIVRE	18
6.2	Formules d'EULER	19

7	Lignes de niveau	19
8	Équations du second degré	20
8.1	Équations du second degré à coefficients réels	21
8.2	Équations du second degré à coefficients complexe	22
8.2.1	Racine carrée d'un nombre complexe	22
8.2.2	Résolution d'équations du second degré	23

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion des nombres complexes
- Calculer avec les nombres complexes (sous n'importe quelle forme)
- Représenter les nombres complexes dans le plan
- Passer d'une forme à une autre (forme algébrique, trigonométrique, exponentielle)
- Utiliser les différentes formes des nombres complexes dans un problème
- Connaître et utiliser les formules de De Moivre et Euler
- Savoir reconnaître et décrire une ligne de niveau
- Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe
- Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.

1 Introduction

Les chemins de la création mathématique sont imprévisibles et résultent parfois d'audacieuses transgressions des règles et savoirs établis.

Le simple fait d'avoir introduit dans les calculs un symbole pour désigner des racines carrées de nombres négatifs a conduit au fil des siècles à élaborer la puissante théorie des nombres complexes.

1.1 Le nombre i

Considérons différentes équations :

1. Tout d'abord $x + 1 = 0$.

Les coefficients de cette équation sont des entiers naturels mais elle ne possède pas de solution dans \mathbb{N} !

Pour résoudre ce problème il a donc fallu « inventer » les entiers relatifs, un ensemble plus gros noté \mathbb{Z} avec les propriétés algébriques qu'on lui connaît.

2. Maintenant intéressons nous aux équations du type $ax + b = 0$ avec a et b dans \mathbb{Z} .

Beaucoup d'entre elles n'ont pas de solutions dans \mathbb{Z} par exemple $5x + 2 = 0$ ou $3x - 1 = 0$. Cela conduit à introduire l'ensemble des nombres décimaux, noté \mathbb{D} puis l'ensemble des nombres rationnels, noté \mathbb{Q} . On peut ainsi trouver les solutions de toutes les équations dites affines c'est à dire de degré 1 avec une seule inconnue.

3. Finalement, on s'intéresse aux équations de degré 2 avec notamment $x^2 - 2 = 0$ qui n'a pas de solution dans \mathbb{Q} . Ce genre d'équation amène à définir l'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R} .

Des nombres n'ayant pas de développement décimal périodique apparaissent comme $\sqrt{2}$, π .

Mais l'ensemble \mathbb{R} est tout de même doté de toutes les propriétés opératoires que l'on connaît !

4. Fort de tout cela, nous n'en n'avons pas terminé !

Des équations résistent par exemple $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelles justement à cause des propriétés opératoires de \mathbb{R} .

Pour résoudre ce problème, de nouveaux nombres ont été introduits : à l'origine de ceux-ci une solution de $x^2 + 1 = 0$ que l'on note i et dont la valeur numérique est définie par $i^2 = -1$.

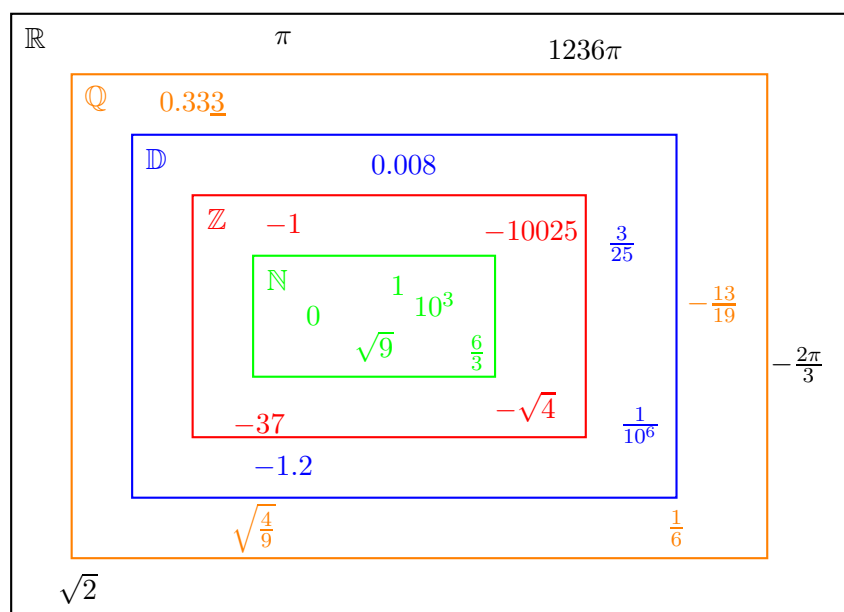
Le **nombre** i est un nombre dont le carré vaut -1 , de plus son opposé $-i$ a aussi pour carré -1 . En effet : $(-i)^2 = i^2 = -1$.

Les deux racines de -1 sont les deux « nombres » i et $-i$.

Un peu d'histoire : La notation i fut introduite par **Euler** en 1777, puis reprise par **Gauss** au début du *XIX*ème siècle. Cependant, le premier à parler de nombre imaginaire fut le très cartésien **Descartes** en 1637.

1.2 L'ensemble des nombres complexes

On connaît déjà 5 ensembles permettant de « ranger » les nombres : il s'agit de \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} :



Définition 1.

On définit l'ensemble \mathbb{C} qui a les caractéristiques suivantes :

- Ses éléments sont appelés **nombres complexes**,
- Il contient le nombre i vérifiant $i^2 = -1$.

Remarque

\mathbb{C} est alors un ensemble encore plus grand que tous les autres, et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2 Forme algébrique

2.1 Définition

Définition 2.

Chaque élément z de l'ensemble \mathbb{C} s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec a et b des réels.

- ▶ a est appelé **partie réelle** de z et est noté $\Re(z)$,
- ▶ b est appelé **partie imaginaire** de z et est noté $\Im(z)$.

Remarque

Nombres particuliers :

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est donc réel,
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un **imaginaire pur**.

**Exemple**

Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

- | | | |
|---------------------------|--------------------|-------------------|
| ▶ $z = 2 + 3i$ | $a = 2$ | $b = 3$ |
| ▶ $z = -1 + \frac{1}{2}i$ | $a = -1$ | $b = \frac{1}{2}$ |
| ▶ $z = -i$ | $a = 0$ | $b = -1$ |
| ▶ $z = \pi$ | $a = \pi$ | $b = 0$ |
| ▶ $z = 4i - \frac{1}{3}$ | $a = -\frac{1}{3}$ | $b = 4$. |

Propriété 1.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

2.2 Premiers calculs

Propriété 2.

On pose $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et k un réel, on a :

$$\blacklozenge z + z' = z' + z = (a + a') + i(b + b'),$$

$$\blacklozenge z - z' = (a - a') + i(b - b'),$$

$$\blacklozenge kz = ka + ikb,$$

$$\blacklozenge zz' = z'z = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Démonstration.

Nous allons démontrer la dernière propriété. Les autres sont laissées en exercice.

$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b + i^2bb' \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b). \end{aligned}$$



Exemple

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$, on a :

$$\rightarrow z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i,$$

$$\rightarrow z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i,$$

$$\rightarrow 2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i,$$

$$\rightarrow zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i,$$

$$\rightarrow z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i.$$

2.3 Représentation géométrique des nombres complexes

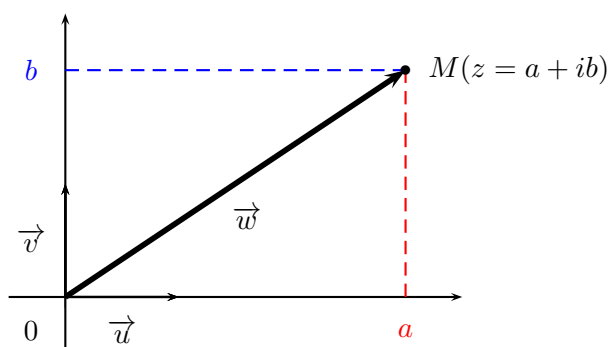
Soit $R = (O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan. À tout point M de coordonnées (x, y) dans ce repère on peut faire correspondre le nombre complexe $z = x + iy$. On a réalisé ce que l'on appelle une bijection de \mathbb{C} vers le plan.

Ainsi à tout nombre complexe on peut faire correspondre un unique point du plan et réciproquement à tout point du plan on peut faire correspondre un unique complexe. Cette représentation est due au mathématicien français **Jean Robert Argand** (1768 – 1822) et va s'avérer d'un grand intérêt en géométrie. Certains problèmes de géométrie se traduisent très bien en calculs faisant intervenir des nombres complexes et réciproquement, certains calculs avec les nombres complexes ont une interprétation géométrique naturelle.

Définition 3.

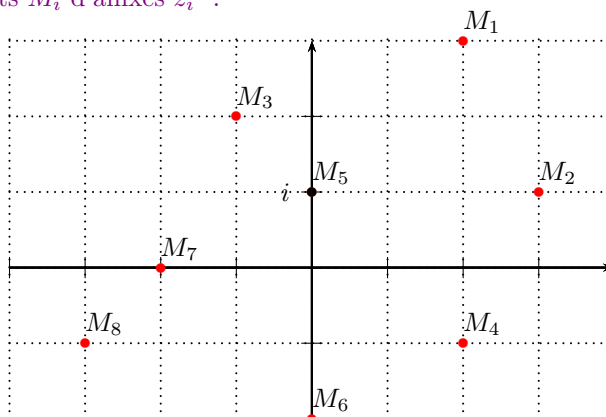
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- ▶ Au point M de coordonnées $(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,
On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M .
- ▶ Au vecteur \vec{w} de coordonnées $(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,
On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du vecteur \vec{w} .
- ▶ Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son **affixe** dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le **plan complexe**.

**Exemple**

On place dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i :

- ▶ $z_1 = 2 + 3i$
- ▶ $z_2 = 3 + i$
- ▶ $z_3 = -1 + 2i$
- ▶ $z_4 = 2 - i$
- ▶ $z_5 = i$
- ▶ $z_6 = -2i$
- ▶ $z_7 = -2$
- ▶ $z_8 = -i - 3$

**Propriété 3.**

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, alors :

- ◆ Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$,
- ◆ $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- ◆ $\|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$,
- ◆ Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$.

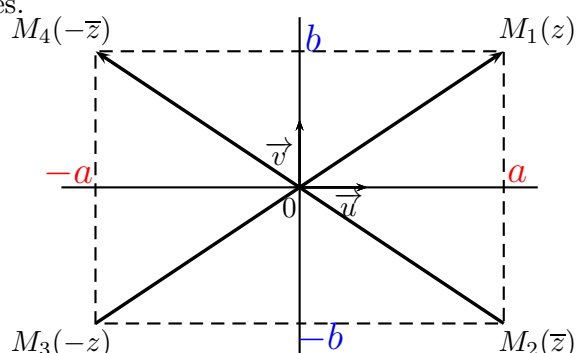
Remarque

Dans la propriété précédente, on vient de faire le lien entre les opérations de vecteurs du plan et les opérations de nombres complexes.

2.4 Conjugué d'un complexe**Définition 4.**

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Géométriquement, si M_1 est le point d'affixe z , le point M_2 d'affixe \bar{z} est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des abscisses.

**Exemple**

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$, on a :

$$\rightarrow z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i) = 1 + 8i,$$

$$z \times z' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i.$$

$$\rightarrow \bar{z} = 3 - 5i,$$

$$\bar{z}' = -2 - 3i.$$

$$\rightarrow \bar{z} + \bar{z}' = (3 - 5i) + (-2 - 3i) = 1 - 8i,$$

$$\overline{z + z'} = 1 - 8i.$$

$$\rightarrow \bar{z} \times \bar{z}' = (3 - 5i) \times (-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i,$$

$$\overline{z \times z'} = -21 + i.$$

Propriété 4.

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\blacklozenge \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'.$$

$$\blacklozenge \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'.$$

$$\blacklozenge \overline{\bar{z}} = z.$$

$$\blacklozenge z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacklozenge z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$

$$\blacklozenge \Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}).$$

$$\blacklozenge \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

2.5 Inverse d'un complexe

Soit $z = a + ib$, on a : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ qui est un nombre réel.

Ainsi, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.



Exemple

Calculs d'inverses :

$$\rightarrow \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\rightarrow \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

$$\rightarrow \frac{2}{i} = \frac{2 \times -i}{i \times -i} = \frac{-2i}{1} = -2i.$$

$$\rightarrow \frac{2+i}{-3+i} = \frac{(2+i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6-2i-3i+1}{10} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Propriété 5.

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\blacklozenge \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

$$\blacklozenge \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

3 Forme trigonométrique

3.1 Module d'un nombre complexe

Définition 5.

Le **module** du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque

Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a a} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$.

La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} . Par ailleurs le module d'un nombre complexe correspond à la norme du vecteur qui lui est associé.



Exemple

Calcul du module de nombres complexes :

$$\rightarrow |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\rightarrow |-5| = 5.$$

$$\rightarrow |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\rightarrow |9i| = \sqrt{0^2+9^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Propriété 6.

Soit z un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} \blacklozenge |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0. & \blacklozenge |-z| = |\bar{z}| = |z|. & \blacklozenge |z \times z'| = |z| \times |z'|. \\ \blacklozenge \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|}. & \blacklozenge \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|}. & |z^n| &= |z|^n \end{aligned}$$

Démonstration.

Ces propriétés se démontrent à l'aide de la forme algébrique des nombres complexes, par le calcul avec celles-ci. (Exercices)

Proposition 1 (Inégalité triangulaire).

Pour tous complexes z et z' , $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

3.2 Argument d'un complexe non nul**3.2.1 Définitions****Définition 6.**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z :

- On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$,
- On note $\theta = \arg(z)$,
- θ vérifie :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

**Exemple**

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\rightarrow z_1 = 2 + 2i : \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\rightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3} : \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}.$$

Propriété 7.

Propriétés algébriques des arguments :

$$\begin{aligned} \blacklozenge \arg(zz') &= \arg(z) + \arg(z') [2\pi]. & \blacklozenge \arg(z^n) &= n \arg(z') [2\pi]. \\ \blacklozenge \arg\left(\frac{1}{z}\right) &= \arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]. & \blacklozenge \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg(z) - \arg(z') [2\pi]. \end{aligned}$$

Démonstration.

Ces propriétés se démontrent à l'aide des formules d'additions et de la symétrie. (exercice)

**Exemple**

D'après l'exemple précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \rightarrow \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}. & \rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}. \\ \rightarrow \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) &= -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Proposition 2.

- ◇ soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts. Alors $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$
- ◇ Soit A, B, C et D des points deux à deux distincts, d'affixes a, b, c et d . Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$.

Démonstration.

- ☞ Soit $M(b - a)$. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(b - a) [2\pi]$.
- ☞ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(d - c) - \arg(b - a) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$

3.3 Écriture trigonométrique

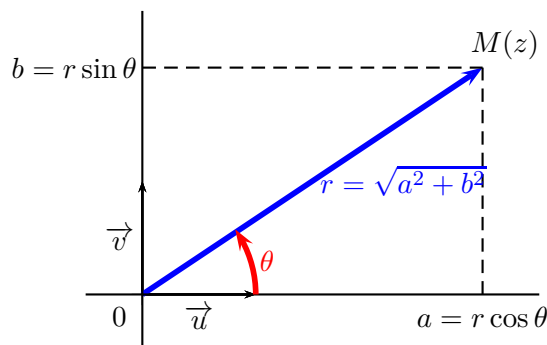
On se place dans un plan muni du repère (O, I, J) .

Définition 7.

Un nombre complexe non nul z peut être écrit sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z
- $|z| = r \in \mathbb{R}^{+*}$ est le module de z

cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z .

**Démonstration.**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ainsi $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

Or $-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ (exercice : démontrer ces encadrements).

Et $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$.

Donc le point M de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ est sur le cercle trigonométrique et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Finalement, $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre z , il faut donc calculer successivement le module et l'argument de z .

**Exemple**

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$\rightarrow z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

$$\rightarrow z_2 = \sqrt{3} + i : \begin{cases} |\sqrt{3} + i| = 2 \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Remarque

Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se "voit" :

$$- 1 = \cos 0 + i \sin 0 \text{ donc } |1| = 1 \text{ et } \arg(1) = 0.$$

$$- i = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{ donc } |i| = 1 \text{ et } \arg(i) = \frac{\pi}{2}.$$

Méthode (De la forme algébrique à la forme trigonométrique).

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

1. Si $a = 0$ alors $z \in i\mathbb{R}$ et $|z| = |b|$ (attention à la notation qui est la même pour le module et la valeur absolue). Ainsi $z = i \times |b|$ si $b > 0$ et $z = (-i) \times |b|$ si $b < 0$.

$$\text{Or } i = i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } -i = i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Ainsi } z = |b| \left(i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \quad \text{ou} \quad z = |b| \left(i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

2. Si $a \neq 0$ alors on calcule le module de z et on calcule l'argument grâce à la formule

$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Finalement on écrit : } z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Proposition 3.

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points distincts du plan. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} d'affixes respectives $b - a$ et $d - c$ sont :

❖ **Orthogonaux** si et seulement si $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

C'est à dire si et seulement si $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

❖ **Colinéaires** si et seulement si $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 [\pi]$.

C'est à dire si et seulement si $\frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$.

**Exemple**

➔ Considérons $A(2 + i)$, $B(2 + 2i)$, $C(4 + 3i)$ et $D(5 + 3i)$.

Alors $\arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{(2+2i) - (2+i)}{(5+3i) - (4+3i)}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux.

➔ Considérons $A(2 + 2i)$, $B(4 + 2i)$, $C(4 + 3i)$ et $D(5 + 3i)$.

Alors $\arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{(2+2i) - (4+2i)}{(5+3i) - (4+3i)}\right) = \arg(-2) = \pi$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

4 Forme exponentielle

4.1 Définitions

Définition 8.

Pour tout nombre réel θ , on pose : $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Remarque

- Nous connaissons la fonction appelée fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{*+} . Elle est en fait la restriction aux nombres réels de la fonction $z \mapsto e^z$ où z est un nombre complexe.
- $e^1 = e$ est un nombre qui a pour valeur approchée 2,718.

Définition 9.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ .

On note ce nombre z sous la forme $z = r e^{i\theta}$.

Cette écriture est appelée **notation exponentielle de z** .

Remarque

On a alors $z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \theta + ir \sin \theta = a + ib$.



Exemple

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$1 - i$	$\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$	$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$\sqrt{3} + i$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$	$2 e^{i\frac{\pi}{6}}$



Exemple

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de $z = 4 e^{i\frac{3\pi}{4}}$:

$$\rightarrow z = 4 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$$

$$\rightarrow z = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\rightarrow z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.$$

4.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Remarque

Pour les calculs du type « somme » ou « différence », on utilisera la forme algébrique.

On préférera la forme exponentielle pour les calculs de produits ou de quotients.

Propriété 8.

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, tous $r, r' \in \mathbb{R}_*^+$, tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\blacklozenge r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\blacklozenge \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\blacklozenge (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$



Exemple

Soit $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\rightarrow z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

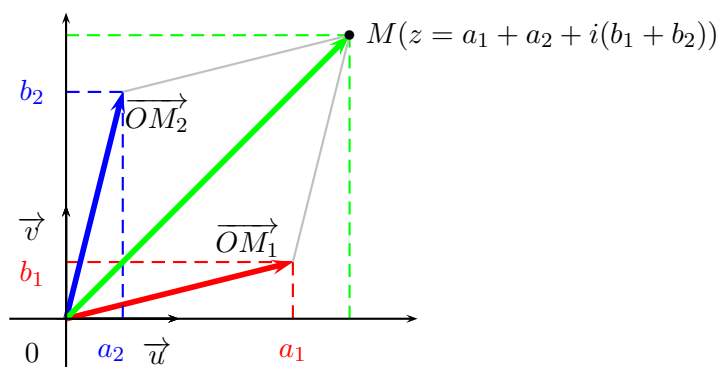
$$\rightarrow z_2^4 = (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} = 144 e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

$$\rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

5 Interprétation géométrique

5.1 Addition de deux complexes

Soit z_1 et z_2 les affixes de deux points M_1 et M_2 . Ils correspondent aussi aux affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Faire la somme de deux complexes revient à sommer terme à terme les parties réelles et imaginaire de chacun. Ainsi faire la somme de deux complexes correspond géométriquement à faire la somme des deux vecteurs issus de l'origine correspondants.



5.2 Transformations géométriques

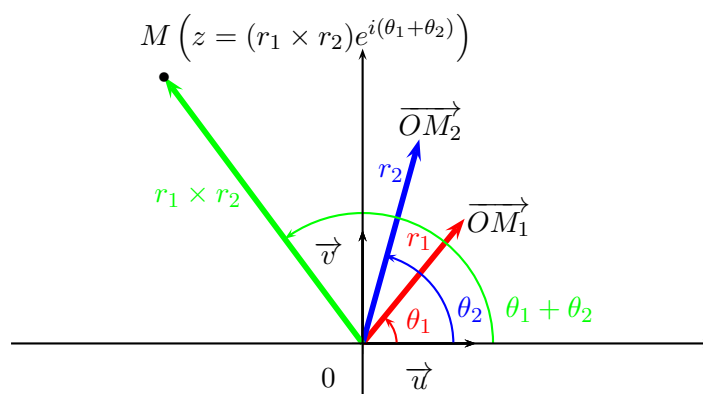
Définition 10.

On considère des transformations du plan $M \mapsto M'$ et on notera z et z' les affixes respectives de M et M' .

- ▶ La **translation** de vecteur \vec{u} d'affixe b a pour écriture $z' = z + b$.
- ▶ La **rotation** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- ▶ L'**homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k a pour écriture complexe $z' - \omega = k(z - \omega)$.

5.3 Multiplication, quotient de deux complexes

Soit z_1 et z_2 les affixes de deux points M_1 et M_2 . Ils correspondent aussi aux affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ et chacun d'eux possède une représentation sous forme exponentielle c'est à dire un argument et un module qui les déterminent. Faire le produit de ces complexes revient donc à multiplier leurs modules et ajouter leurs arguments. Cela correspond en fait à deux transformations successives, peu importe l'ordre, une homothétie de rapport l'un des modules et une rotation d'angle l'argument correspondant au choix du module.



Remarque

Le quotient de deux complexes étant une multiplication par l'inverse de l'un d'eux, l'interprétation géométrique est la même en adaptant les calculs.

6 Formules de DE MOIVRE et d'EULER

Suite aux travaux de Bombelli, les racines de nombres négatifs s'imposent dans les calculs en Europe. Ces nombres « imaginaires » ou « inconcevables » deviendront nos nombres complexes. Dans un premier temps, les mathématiciens européens remarquent des formules remarquables faisant intervenir l'unité imaginaire i (à l'époque noté $\sqrt{-1}$). Entre autres, les formules sur $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ obtenues par Ptolémée se résument avantageusement par la formule

$$(\cos(x+y) + i \sin(x+y)) = (\cos(x) + i \sin(x)) (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Cette égalité implique la formule de de Moivre. Pressenti par de Moivre en 1730, ce travail fut rédigé par Euler dans l'ouvrage « *Introductio in analysin infinitorum* » (1748). Il fut en grande partie à l'origine des considérations analytiques des fonctions trigonométriques en Europe en les définissant à partir de développements en séries, et présenta la formule d'Euler :

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

 <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Histoire-des-fonctions-trigonometriques.html>

6.1 Formule de DE MOIVRE

Abraham de Moivre né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François et mort le 27 novembre 1754 à Londres. Abraham de Moivre est un mathématicien français qui vécut la plus grande partie de sa vie en exil à Londres en raison de la révocation de l'Edit de Nantes. Il fut l'auteur de deux ouvrages majeurs en mathématiques. Le premier, consacré aux probabilités « *Doctrine of chance* » paru en 1718, s'intéresse en particulier au calcul des probabilités d'un événement aléatoire dépendant d'autres événements aléatoires ainsi qu'aux problèmes de convergence des variables aléatoires. Le second, « *Miscellanea Analytica* » paru en 1730, est un ouvrage d'analyse dans lequel figure pour la première fois la fameuse « formule de Stirling ». On raconte cette histoire au sujet de sa mort. Il s'était rendu compte qu'il dormait un quart d'heure de plus chaque nuit. En utilisant cette suite arithmétique, il avait calculé à quelle date il mourrait : cela devait correspondre au jour où il dormirait 24 heures. Ce fut exactement ce qu'il advint.



Propriété 9.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.



Exemple

Factorisation de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:

- On a d'une part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$ d'après la formule de DE MOIVRE,
- et d'autre part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta$ par développement,
- d'où : $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
- et $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$.

6.2 Formules d'EULER

Propriété 10.

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R} : \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$



Exemple

Linéarisation de $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{-2 + e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right), \\ \rightarrow \text{donc : } \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}. \end{aligned}$$

7 Lignes de niveau

Définition 11.

Dans un repère orthonormal (O, I, J) , la **ligne de niveau** k d'une fonction f est l'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z) = k$.

Remarque

Les lignes de niveau représentent les solutions de l'équation $f(z) = k$

Les principales lignes de niveau dans \mathbb{C} sont :

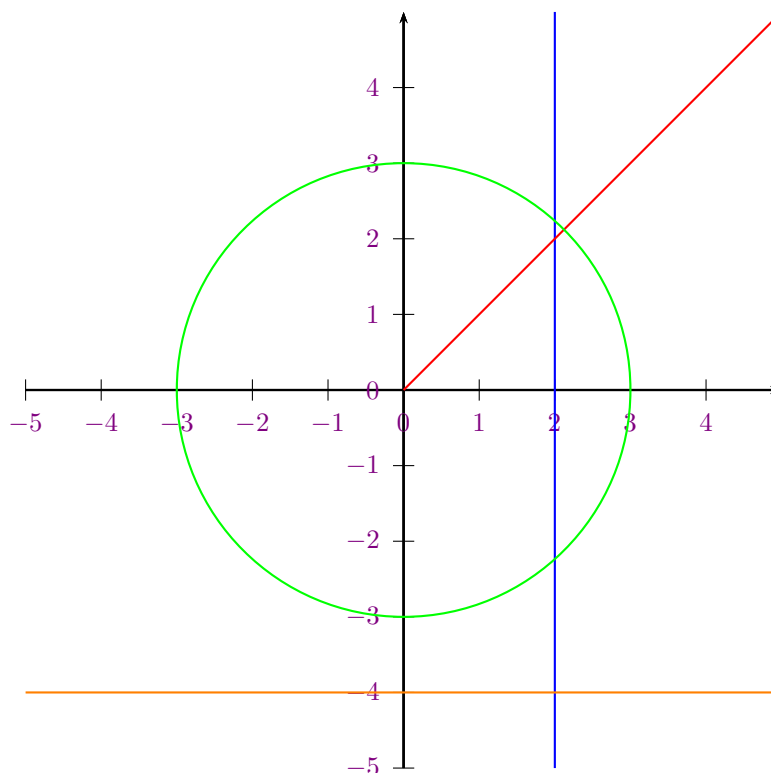
- La ligne de niveau k de la fonction $z \mapsto \Re(z)$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z dont la partie réelle est k , c'est à dire la droite d'équation $x = k$.
- La ligne de niveau k de la fonction $z \mapsto \Im(z)$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z dont la partie imaginaire est k , c'est à dire la droite d'équation $y = k$.
- La ligne de niveau k (positif) de la fonction $z \mapsto |z - a|$ est le cercle de centre A d'affixe a et de rayon k .
- La ligne de niveau k de la fonction $z \mapsto \arg(z - a)$ est la demi-droite d'origine A d'affixe a d'angle k par rapport à (O, \vec{u}) .



Exemple

On construit les lignes de niveau suivantes :

- En bleu, la ligne de niveau 2 de la fonction $\Re(z)$.
- En orange, la ligne de niveau -4 de la fonction $\Im(z)$
- En vert, la ligne de niveau 3 de la fonction $|z|$.
- En rouge, la ligne de niveau $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $\arg(z)$.



8 Équations du second degré

Rappel :

Pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels, la méthode consiste à mettre le polynôme sous sa forme canonique et à utiliser une identité remarquable.

En supposant $a \neq 0$, on a :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

La forme des solutions dépend alors de $b^2 - 4ac$ que l'on note Δ .

On remarque que si $\Delta < 0$ alors on peut écrire $\Delta = i^2|\Delta|$ et $\sqrt{\Delta}$ a le « sens » qu'on lui connaît :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{i^2|\Delta|} = i\sqrt{-\Delta}.$$

En factorisant et réduisant $\left(\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$ on obtient les formules de solutions connues suivant les valeurs de Δ .

8.1 Équations du second degré à coefficients réels

Théorème 1.

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré où $a; b; c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

♦ Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

♦ Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

♦ Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$



Exemple

Résolution dans \mathbb{C} de $z^2 - 2z + 2 = 0$:

→ $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2$.

→ Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

→ $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$.

Résolution dans \mathbb{C} de $z^2 + 6z + 9 = 0$:

→ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

→ Le discriminant étant nul, l'équation admet une solution double :

→ $z_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$.

Résolution dans \mathbb{C} de $z^2 + 2z - 3 = 0$:

→ $\Delta = b^2 - 4ac = 16 = 4^2$.

→ Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles :

→ $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$.

Proposition 4.

Soit P un polynôme du second degré à coefficients réels et z un nombre complexe qui ne soit pas réel (dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) tel que $P(z) = 0$ alors $P(\bar{z}) = 0$.

Démonstration.

Si P un polynôme du second degré à coefficients réels alors il existe trois réels a , b et c tels que $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Ainsi $P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2 + bz + c}$ par propriété de la conjugaison de nombres complexes.

Or $\overline{az^2 + bz + c} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$

Donc $P(\bar{z}) = 0$.

nous venons de démontrer ainsi que lorsque un polynôme est à coefficients réel, s'il admet une racine complexe alors son conjugué est aussi une racine du polynôme.

8.2 Équations du second degré à coefficients complexe

Ces équations généralisent la partie précédente. La méthode de mise sous forme canonique étant la même mais avec des nombres complexes, le problème vient lorsque l'on doit déterminer la racine carrée de Δ qui a une forme plus compliquée que $i^2|\Delta|$.

8.2.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe de forme algébrique $Z = a + ib$. On cherche à définir sa racine carrée c'est à dire un nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Posons $z = x + iy$ alors $z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Ainsi par identification :

$$\begin{cases} a &= x^2 - y^2 \\ b &= 2xy \end{cases}$$

Mais cela reste trop peu d'informations pour déterminer les valeurs de a et b facilement.

À cela on rajoute le fait que $|z|^2 = |Z|$ soit $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, on obtient alors un système que l'on peut résoudre facilement :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Méthode (Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe).

Considérons le nombre complexe $Z = 3 + 4i$. Déterminons ses racines carrées.

1. Tout d'abord on calcule $|Z| = 5$
2. Ensuite on écrit le système à résoudre :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

3. On somme la ligne 1 et la ligne 3 de façon à obtenir une expression pour x^2 .

$$\text{Ici } x^2 = \frac{1}{2} \times (3 + 5) = 4.$$

Soit deux solutions possible pour x : $x = 2$ ou $x = -2$.

4. On détermine les valeurs possibles pour y en remplaçant x successivement par les valeurs trouvées dans la ligne 2.

Ainsi $y = 1$ lorsque $x = 2$ et $y = -1$ lorsque $x = -2$.

Les couples solution sont $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$
 Les racines de $Z = 3 + 4i$ sont $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = -2 - i$

Remarque

- Une racine carrée du nombre complexe z est souvent notée δ , on remarquera qu'alors $-\delta$ est l'autre racine carrée.
- Attention lorsque l'on considère les racines carrées d'un point de vue des nombres complexes, elles sont toujours au nombre de deux. Par contre la racine carrée d'un point de vue d'un nombre réel r est **unique**, elle correspond au nombre positif dont le carré vaut r .

8.2.2 Résolution d'équations du second degré**Théorème 2.**

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré où $a; b; c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta, -\delta$ les racines carrées complexes de Δ .

Les solutions de l'équations sont alors :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Remarque

Ces formules généralisent bien sûr celles rencontrées lorsque le polynôme est à coefficients réel.

**Exemple**

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

→ La première étape consiste à savoir si les coefficients du polynôme sont réels ou complexes. Calculons Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = i^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2}i$$

→ La seconde étape consiste alors à déterminer les racines de Δ . En appliquant la méthode vue précédemment, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on a : $\delta = \sqrt{2} + i$ et $-\delta = -\sqrt{2} - i$

→ La dernière étape consiste à synthétiser les informations grâce aux formules connues. Les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-i + \sqrt{2} + i}{2 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-i - \sqrt{2} - i}{2 \times 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i.$$

Proposition 5.

Soient trois complexes a , b et c , avec $a \neq 0$.

Deux nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient les relations :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, ce sont les deux racines de l'équation : $az^2 + bz + c = 0$