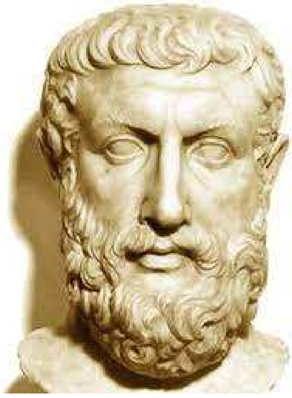
CHAPITRE

5 Limite de fonctions, continuité

On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec le philosophe grec **Zénon d'Élée** *(-450). Il est connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer l'impossibilité du mouvement.*
Par exemple, celui d'Achille et de la tortue :
« Achille, situé en O, poursuit une tortue qui se trouve en A. Le temps qu'il arrive en A, la tortue sera en B. Achille devra donc ensuite aller en B. Mais alors la tortue sera en C, et ainsi de suite. Achille pourra se rapprocher sans cesse de la tortue, mais il ne pourra jamais la rattraper. »



L'Analyse fit d'énormes progrès au cours des XVII^e et XVIII^e siècles. Les mathématiciens de cette époque avaient une intuition de la notion de limite mais il faudra attendre le XIX^e avec le français **Louis-Augustin Cauchy** *(1789-1857), puis l'allemand* **Karl Weierstrass** *(1815-1897) pour avoir une définition précise de la limite.*

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de limite en un point et en l'infini
- Calculer des limites en un point et en l'infini
- Connaître et interpréter les notions d'asymptotes
- Connaître les limites usuelles des fonctions usuelles
- Savoir faire des opérations, composer, comparer, encadrer avec des limites
- Aborder la notion de continuité d'une fonction
- Démontrer qu'une fonction est continue ou non
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Première partie

Langage des limites

1 Limite d'une fonction en un point a

1.1 Cas d'une limite finie en un point

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel dans I ou une borne de I.
Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Remarque

Certaines fonctions n'admettent pas de limite en a.

Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0 :

les notations seront introduites dans les paragraphes suivants

— *sur $\mathbb{R}^*_-$, $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ donc, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$,*
— *sur $\mathbb{R}^*_+$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +1$.*

1.2 Cas d'une limite infinie en un point

1.2.1 Approche graphique

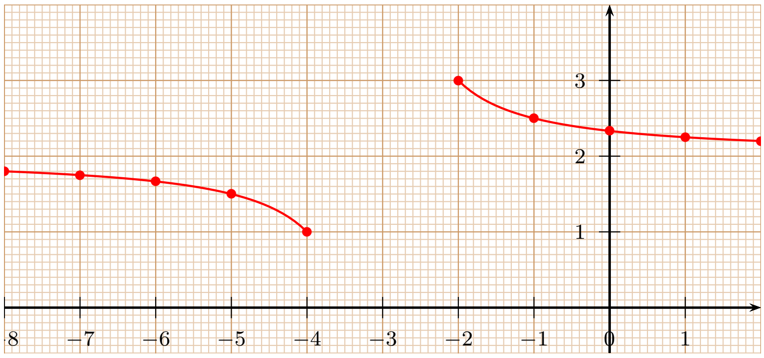
On considère la fonction f, définie pour tout $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2 = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

On souhaite représenter cette fonction. On construit le tableau de valeurs suivant :

la fonction n'est pas définie pour $x = -3$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1,8	1,75	1,67	1,5	1		3	2,5	2,33	2,25	2,2

Ce qui donne :



Graphiquement, on observe deux phénomènes :

— entre -4 et -2, nous n'avons pas assez d'éléments pour savoir ce qu'il se passe. Il nous faut construire un tableau plus précis avec des valeurs proches de -3 :

x	$-3,1$	$-3,01$	$-3,001$	$-3,0001$	$-2,9999$	$-2,999$	$-2,99$	$-2,9$
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12

On remarque que plus on se rapproche de -3, plus la courbe prend de grandes valeurs . On note $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$.

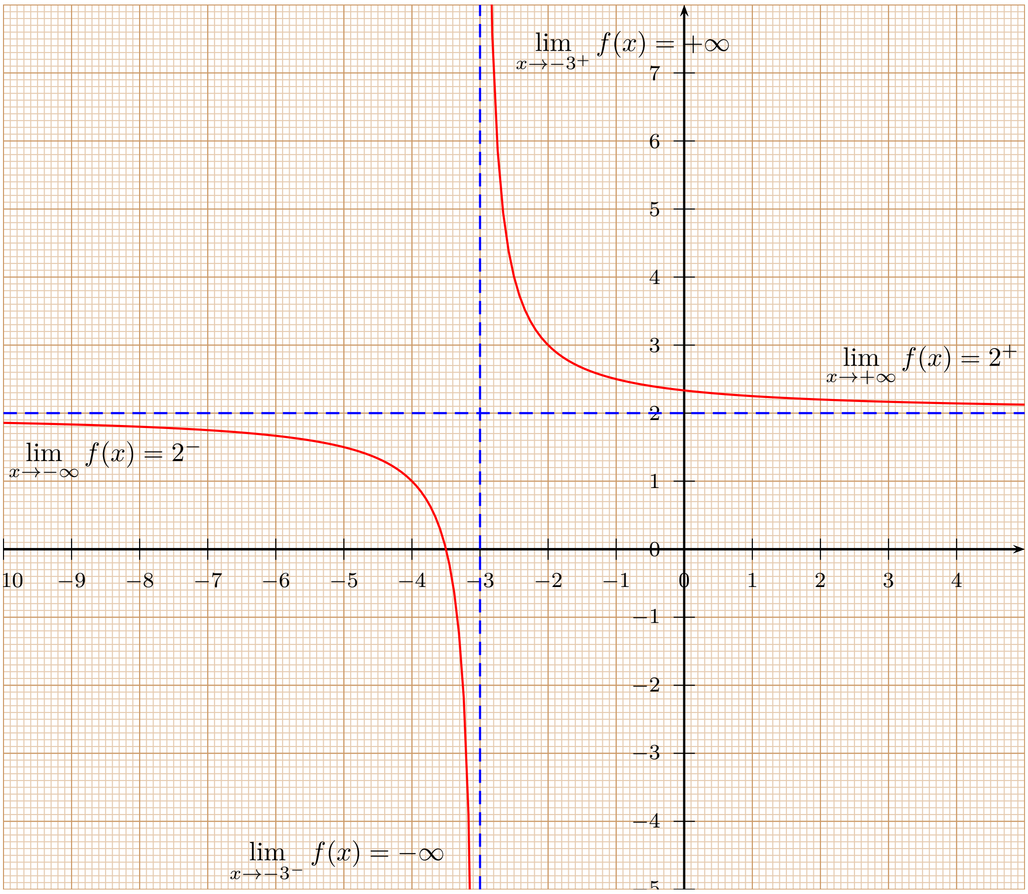
— « avant » 8 et « après » 2, on a l'impression que la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = 2$. Afin d'étayer ce phénomène, on construit un tableau avec de grandes valeurs en valeur absolue :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$1,9999$	$1,9990$	$1,989$	$1,8571$	$2,0769$	$2,0097$	$2,0010$	$2,0001$

On remarque que plus on se rapproche de $\pm\infty$, plus les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2 . On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Ce qui nous permet d'obtenir un graphique plus complet :

les notations seront introduites dans les paragraphes suivants



1.2.2 Définition

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]\,a\,;b\,]$ ou $[\,b\,;a\,[$ où a et b sont des réels. Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Remarque

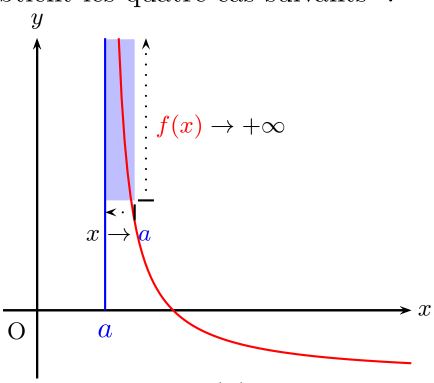
Lorsque le fonction n'est pas définie en a, on précise si on s'en approche

$\pm\infty$ signifie que la limite est soit $+\infty$, soit $-\infty$

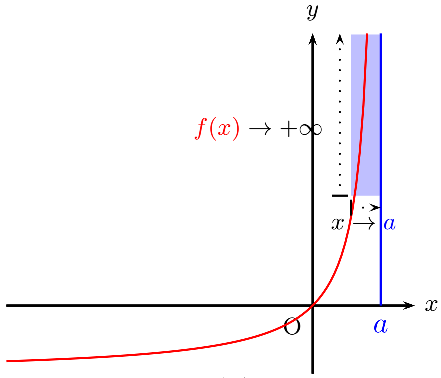
— *par valeurs inférieures* : $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$;

— *par valeurs supérieurs* : $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

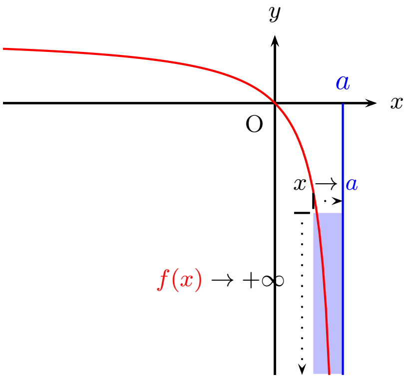
On obtient les quatre cas suivants :



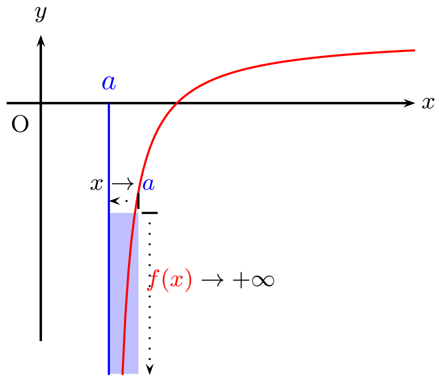
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

1.2.3 Asymptotes verticales

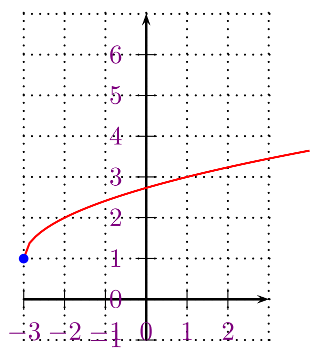
Définition 3.

Dans le cas où la limite en a vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Exemple

« Visualisation » de limites en un point :

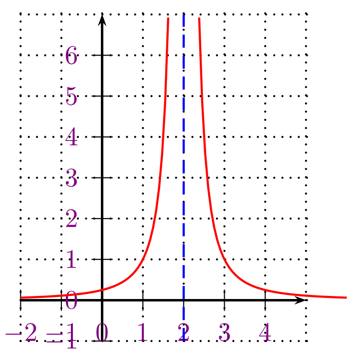
$f(x) = \sqrt{x+3} + 1$



$\lim_{x \to -3} f(x) = 1$

Il n'y a pas d'asymptote.

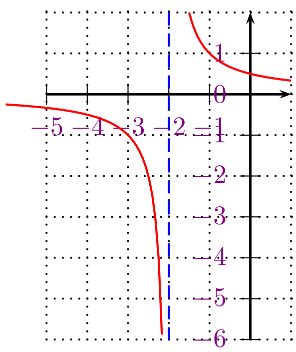
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$



$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2 Limites d'une fonction en l'infini

2.1 Cas d'une limite finie en l'infini

2.1.1 Définition

Définition 4.

Soit a un nombre réel. Soit f une fonction définie au moins sur $]a; +\infty[$. Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Remarque

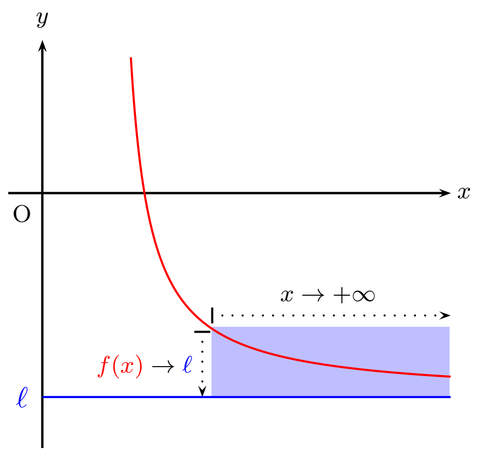
Les définitions précédentes s'adaptent au cas où f est définie sur $]-\infty; a[$. La limite est alors considérée en $-\infty$.

Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini : par exemple les fonctions cosinus et sinus.

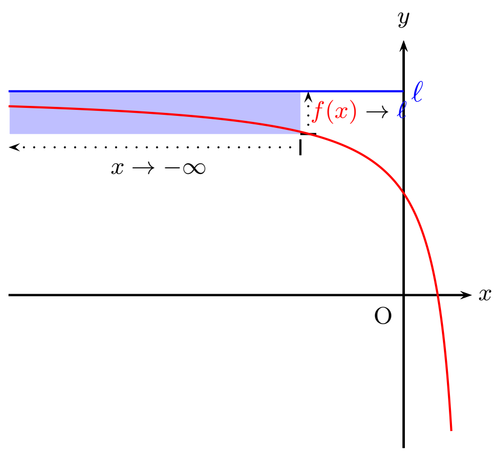
2.1.2 Asymptote horizontale

Définition 5.

Dans le cas où la limite en $\pm\infty$ vaut ℓ, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

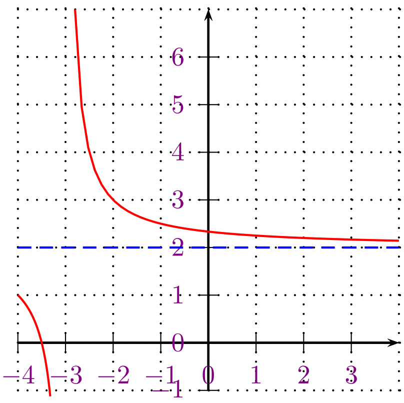


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Exemple

« Visualisation » de limites en $+\infty$:

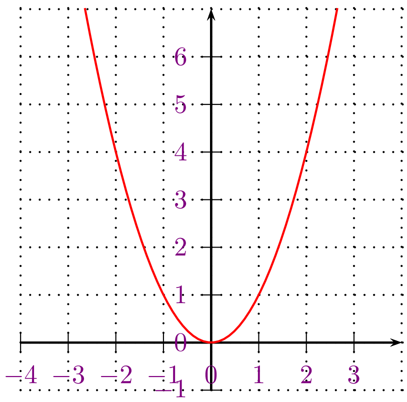
$f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

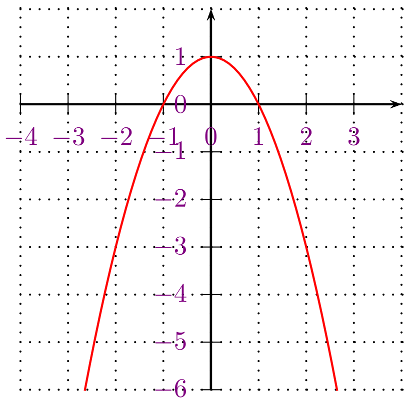
$f(x) = x^2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

$f(x) = 1 - x^2$



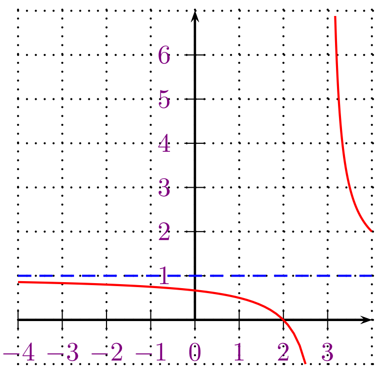
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

Exemple

« Visualisation » de limites en $-\infty$:

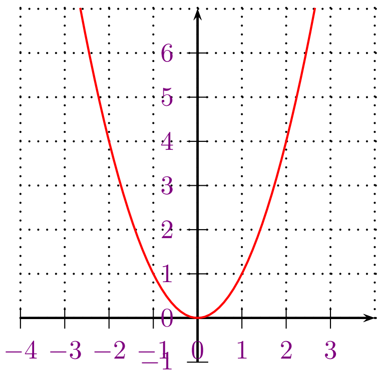
$f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 1$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

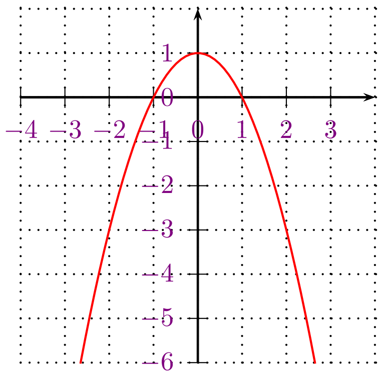
$f(x) = x^2$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

$f(x) = 1 - x^2$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

2.2 Limite infinie d'une fonction en l'infini

Définition 6.

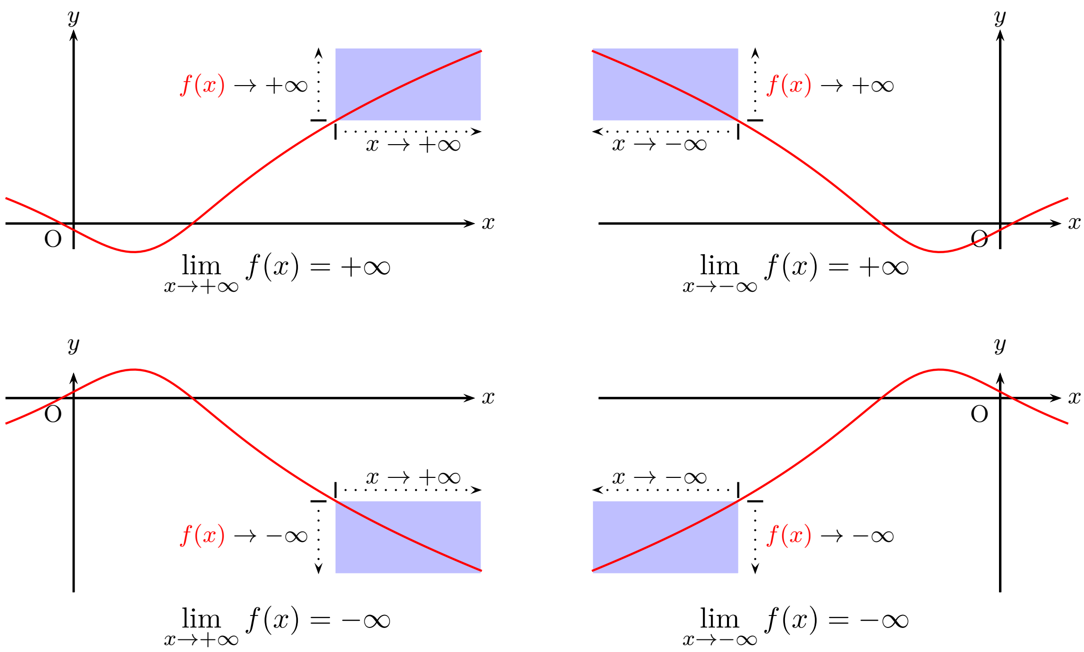
Soit f une fonction définie au moins sur $]\,a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a\,[$). Lorsque la variable x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty)$$

- grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty)$$



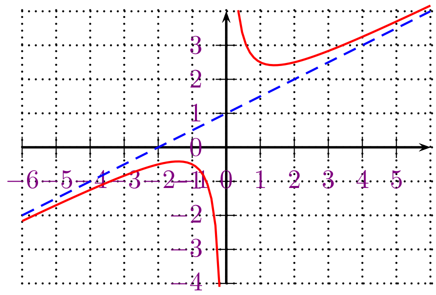
2.2.1 Asymptotes oblique

Définition 7.

Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$, on dit alors que la droite d'équation $y = ax+b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + 1$.



$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3 Limites des fonctions usuelles

Proposition 1.

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence :

$f(x)$ \ limite en	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
x	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0^+	0^+	$+\infty$
x^3	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+
$\frac{1}{x^2}$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+
$\frac{1}{x^3}$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+
$\sqrt{x}$	indéfini	indéfini	0^+	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	indéfini	indéfini	$+\infty$	0^+
$\sin(x)$	aucune	0	0	aucune
$\cos(x)$	aucune	1	1	aucune
$\tan(x)$	aucune	0	0	aucune
$\exp(x)$	0	1	1	$+\infty$
$\ln(x)$	indéfini	indéfini	$-\infty$	$+\infty$

Deuxième partie

Algèbre des limites

4 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire une limite que l'on ne peut pas calculer par une opération élémentaire.

La notation « $*$ » signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

4.1 Limite d'une somme

Proposition 2.

Voici un tableau qui résume les différentes limites d'une somme de deux fonctions :

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple

Calcul de sommes de limites :

- $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 3 & = & 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}+3\right) = +\infty.$$

  La courbe représentative de $f(x) = \dfrac{1+3x}{x}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$.

- $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -\infty} x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x+x^3) = -\infty.$$

Pour lever la FI, il faudrait écrire $x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)$

- $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+x^3) \quad \text{est une forme indéterminée .}$$

Exemple

Calcul de sommes de limites :

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + x^3\right) = 1.$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^- \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x^2\right) = +\infty$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x + x^2\right) = +\infty.$

4.2 Limite d'un produit

Proposition 3.

Voici un tableau qui résume les différentes limites d'un produit de deux fonctions :

$\lim\ f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple

Calcul de produits de limites :

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} (e^x + 3) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0} (e^x - 2) = -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \left[(e^x + 3) \times (e^x - 2)\right] = -4.$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 3) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x - 3) \times \dfrac{1}{x}\right] = -\infty.$

  La courbe représentative de $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x - 1) \times x^3\right] = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^- \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}\right]$ est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.

Pour lever la FI, il faudrait écrire $x + \dfrac{1}{x}$

4.3 Limite d'un quotient

Proposition 4.

Soit f et g deux fonctions bien définies. Voici un tableau qui résume les différentes limites de leur quotient $\dfrac{f}{g}$:

$\lim\ f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim\ \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exemple

Calcul de quotients de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$

  La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -\infty.$

  La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Pour lever la FI, il faudrait écrire $\dfrac{x-1}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 5 & = & 5 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-2}{5}\right) = +\infty.$

Exemple

Calcul de quotients de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 0} (e^x-2) & = & -1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x+3}{e^x-2}\right) = -4.$

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ est une forme indéterminée .

4.4 Compositions

Définition 8.

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, dont l'image est incluse dans un ensemble $J \subset \mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur J.

On appelle fonction composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie pour tout $x \in I$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 2x+3$ et $g : x \mapsto 4x^3$.

$$x \underset{f}{\longmapsto} f(x) = 2x+3 \underset{g}{\longmapsto} g(f(x)) = 4(2x+3)^3$$

D'où $g \circ f(x) = 4(2x+3)^3$

$$x \underset{g}{\longmapsto} g(x) = 4x^3 \underset{f}{\longmapsto} f(g(x)) = 2(4x^3)+3$$

D'où $f \circ g(x) = 2(4x^3) + 3 = 8x^3 + 3$

Proposition 5.

Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c.$

Exemple

Calcul de composition de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X & = & 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+3} = 0.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1) = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0} (x+4) & = & 4 \\ \lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} & = & 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+4} = 2.$

4.4.1 Limite de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Proposition 6.

Soit u une fonction définie sur un $I \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et ℓ un réel.

- si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x))^n = \ell^n$;
- si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x))^n = +\infty$;
- si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x))^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3) = -\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2 = 0$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (x-3) = 0^-$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2 = +\infty$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x-3) = 0^+$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2 = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2 = 0.$

5 Limite et comparaison

5.1 Théorème de comparaison

Proposition 7.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (Figure 1)
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (Figure 2)

Démonstration.

On cherche à démontrer la propriété : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m;+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geqslant m$.

Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et par suite on a : $g(x) \geqslant m$.

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Proposition 8.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]-\infty;a[$, a réel, telles que pour tout $x < a$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (Figure 3)
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (Figure 4)

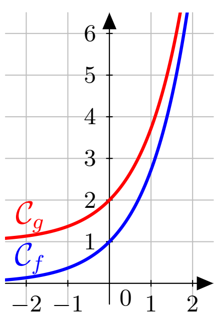


Figure 1

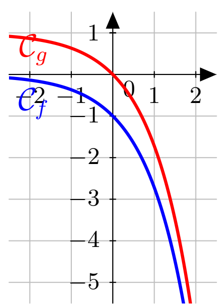


Figure 2

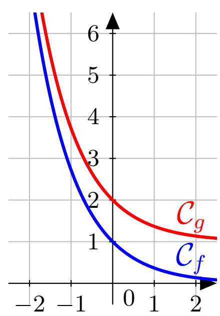


Figure 3

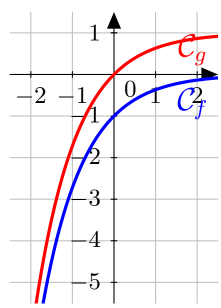


Figure 4

5.2 Théorème d'encadrement

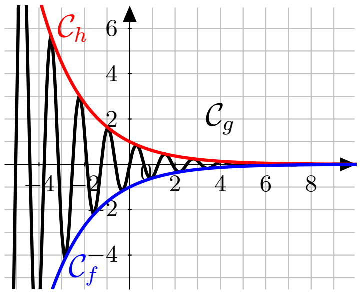
Théorème 1 (Théorème des gendarmes).

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;b[$, c réel appartenant à $]a;b[$, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$.

Remarque

On obtient un théorème analogue en $\pm\infty$. Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.



6 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.

Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination. Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Exemple

Indétermination du type « $\infty-\infty$ » :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-x)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.
- On met x^2 en facteur : $f(x) = 3x^2 - x = x^2\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{1}{x}\right) & = & 1 \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque

De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dictée par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple

Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-3) & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .
- Pour $x\neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3}=\frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}}.$$

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{3}{x^2}\right) & = & 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}.$

Remarque

De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dictée par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.

Exemple

Indétermination du type « $0\times\infty$ » :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».
- On développe : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x^2+1)=x+\dfrac{1}{x}$.
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^+ \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exemple

Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to1} (x^2-1) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to1} (x-1) & = & 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.
- On factorise : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$.
- $\lim\limits_{x\to1} (x-1)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$.

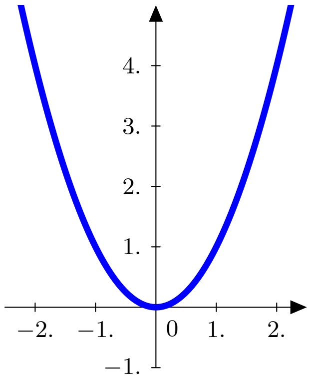
Troisième partie

Continuité de fonction

7 Approche graphique

D'un point de vue graphique, on peut dire qu'une fonction est continue si sa courbe représentative se trace sans lever le crayon.

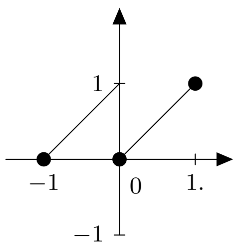
Considérons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.



La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction h définie sur l'intervalle $I = [-1; 1]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x + 1 & \text{si } x \in [-1; 0[\\ h(x) = x & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases}$$



La fonction h n'est pas continue sur I.

8 Définition analytique

Le mathématicien allemand Karl Weierstrass(1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Définition 9.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Méthode (Étude de la continuité en a)**.**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+6 & si \quad x<3 \\ 2 & si \quad x=3 \\ x^2 & si \quad x>3 \end{cases}$ est-elle continue en 3 ?

Pour étudier la continuité en a d'une fonction f, il faut :

1. Calculer la limite de f en a pour $x < a$:

   Limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} x+6 = 9$

2. Calculer la limite de f en a pour $x > a$:

   Limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} x^2 = 9$

3. On compare les valeurs obtenues à $f(a)$:

   $f(3) = 2$. On a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>3}} f(x) \neq f(3)$ donc f n'est pas continue en 3.

Proposition 9.

- ♦ Les fonctions de référence (les fonctions polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carrée, cosinus, sinus ...) sont continues sur leur ensemble de définition.
- ♦ La somme et le produit de fonctions continues sur I sont continues sur I.
- ♦ Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- ♦ Si f est continue sur I, g continue sur J et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Démonstration.

- ☞ Les opérations sur les limites permettent de démontrer la continuité sur un intervalle I des fonctions $f+g$ et $f \times g$.
- ☞ Les opérations sur les limites permettent de démontrer la continuité sur un intervalle I des fonctions $\dfrac{f}{g}$ lorsque g ne s'annule pas sur I.
- ☞ Par composition des limites de fonctions

9 Propriété des valeurs intermédiaires

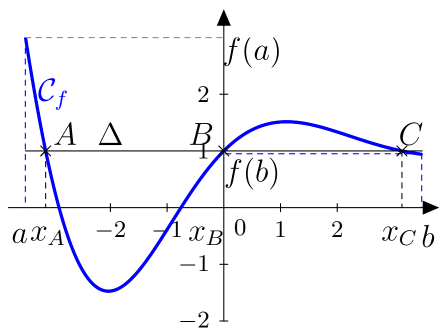
9.1 Cas général

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique :

Dans un repère , $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.
Pour tout $k \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite Δ d'équation $y = k$ coupe **au moins une fois** la courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.



9.2 Cas des fonctions strictement monotones

Corollaire 1.

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$ alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Démonstration.

Existence : Comme f est continue et strictement monotone sur $I = [a;b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I.

Unicité : Supposons qu'il existe plus d'une solution sur I à l'équation $f(x) = k$. Dans ce cas, il existe α et β dans I avec $\alpha \neq \beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = k$. Nous allons montrer que, en supposant ceci, on arrive à une contradiction dans tous les cas de figure.

Considérons le cas où f est strictement croissante pour commencer.

Si $\alpha < \beta$, alors $f(\alpha) < f(\beta)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f(\alpha) = f(\beta) = k$.

Si $\alpha > \beta$, alors $f(\alpha) > f(\beta)$ ce qui est encore en contradiction avec l'hypothèse.

On raisonne de la même façon pour le cas où f est strictement décroissante.

On conclut qu'il ne peut pas exister plus d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur I et que la solution identifiée est donc unique.

9.3 Théorème de l'application réciproque

Une première conséquence de la continuité et de la monotonie d'une fonction est le théorème qui suit. Il permet d'affirmer l'existence d'une fonction **continue** que l'on appelle réciproque qui inverse le processus de transformation des nombres que représente la fonction initiale.

Théorème 3.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone, alors il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans I continue, strictement monotone de même sens de variation que f telle que :

$$f \circ g(x) = x \qquad \text{et} \qquad g \circ f(y) = y$$

La fonction g est appelée réciproque de f et notée f^{-1}

Ce théorème apparaîtra pour justifier des définitions de fonctions ainsi que leurs propriétés comme l'exponentielle, les fonctions racines $n^{ième}$, ...

Quatrième partie

Annexe

Démonstration (À reprendre avec la leçon sur les suites).

On construit les suites (a_n) et (b_n) telles que $[a_n; b_n]$ ait une amplitude de plus en plus petite en utilisant le principe de la dichotomie : si $k \in [f(a); f(b)]$, alors $k \in \left[f(a); f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$ ou $k \in \left]f\left(\frac{a+b}{2}\right); f(b)\right]$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
- Sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, c'est-à-dire que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

Initialisation : On a $a_0 = a$, $b_0 = b$ et donc $a_0 \leqslant b_0$. Si $k \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. On a donc $a_1 \geqslant a_0$.
$a_0 \leqslant b_0$ alors $b_1 \leqslant \frac{b_0+b_0}{2} = b_0$ et $b_1 \geqslant \frac{a_0+a_0}{2} = a_0 = a_1$. On a $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
Sinon, alors $b_1 = b_0$ et $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. On a donc $b_1 \leqslant b_0$. Comme $a_0 \leqslant b_0$ alors $a_1 \geqslant \frac{a_0+a_0}{2} = a_0$ et $a_1 \leqslant \frac{b_0+b_0}{2} = b_0 = b_1$. On a aussi $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'à un rang n on ait $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
Si $k \leqslant f\left(\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}\right)$ alors $a_{n+2} = a_{n+1}$ et $b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leqslant b_{n+1}$
Sinon $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \geqslant a_{n+1}$ et $b_{n+2} = b_{n+1}$.
Dans les deux cas, on obtient que $a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1}$. Il y a donc hérédité.

Conclusion : La suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ pour toute valeur de k. La suite $(b_n - a_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b - a$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Montrons que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite α.

(a_n) est une suite croissante et (b_n) est une suite décroissante. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, les deux suites convergent vers la même limite (propriétés de deux suites convergentes).

On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a, par construction des suites (a_n) et (b_n), $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$. f étant continue sur I, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\alpha)$. On obtient donc $k = f(\alpha)$.

On vient de montrer que, pour un réel k quelconque de $[f(a); f(b)]$, il existe une valeur α telle que $f(\alpha) = k$ donc l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a; b]$.