CHAPITRE

2 Les Polynômes

Les mathématiques grecques sont essentiellement arithmétiques et géométriques. Les résolutions d'équations se font pratiquement sans symbolisme et avec une référence fréquente à l'aspect éométrique. On voit apparaître chez Diophante (250) un début d'écriture algébrique : l'inconnue y est nommé Le Nombre et une lettre ξ lui est attribuée.

Durant leur séjour chez les mathématiciens de langue arabe, les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique. C'est la naissance de l'algèbre que l'on attribue traditionnellement à al-Khawarizmi dans son ouvrage « Abrégé du calcul par restauration et comparaison ». Il y décrit et résout les 6 équations canoniques du second degré ainsi que les méthodes pour s'y ramener. Il y distingue : la racine (X) , le carré (X^2) et le nombre seul. Avec les travaux d'Abu Kamil, les calculs ne se font plus à l'aide seulement de rationnels mais les nombres réels positifs y prennent toute leur place. On voit apparaître alors une généralisation des opérations qui ne vont plus s'appliquer seulement aux nombres mais aussi aux inconnues. L'étude des équations se poursuit avec celle des équations cubiques chez Omar Khayyam et Din al-Tusi (XIII^e siècle). Dans les ouvrages d'Ibn al-Banna (1321), les polynômes de degré n sont représentés par la suite de leurs coefficients. La contrainte d'une homogénéité géométrique (X est une longueur, X^2 est une aire) disparait. Les raisonnements se font presque entièrement dans le domaine de l'algèbre.

En Europe, la recherche d'une symbolique se développe. Michael Stifel (1487-1567) utilise une inconnue privilégiée qu'il répète autant de fois qu'il le faut pour indiquer le degré. Cohabitent à cette époque, plusieurs symboles pour le plus (p ou $+$) et le $-$ (m ou$-$) et le $=$ (=, [, S). En 1484, Nicolas Chuquet invente l'exposant : l'inconnue à la puissance 5 s'écrira I^5. Cette notation sera reprise par Bombelli, Simon Stevin et Descartes. Viète (1540-1603) développe le calcul littéral, représente les inconnues par des voyelles et les paramètres par des consonnes et introduit les notations de la somme, du produit, du quotient, et de la puissance : B in A quadratum, plus D in A, aequari C se traduit ensuite par Descartes en $bx^2 + dx = c$. Tout est alors en place pour que se développe l'étude générale des polynômes.

Sommaire

Chapitre 1

Généralités

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de polynômes
- Savoir identifier deux polynômes
- Aborder la notion de racine d'un polynôme
- Savoir faire une division euclidienne de polynômes

1.1 Fonction polynôme

1.1.1 Fonction polynôme de degré n

Définition 1.

On appelle **fonction polynôme de degré** n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- a_0, a_1, …, a_n sont des réels appelés **coefficients** de P
- Le terme $a_p x^p$ le **monôme** de degré p
- $n = \deg(P)$

Exemple

- La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme de degré 6
- La fonction affine $ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1
- La fonction constante k avec $k \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0

- La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme

Propriété 1.

Soient P et Q des fonctions polynômes non nulles, alors :

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P+Q) \leq \max[\,\deg(P)\ ;\ \deg(Q)\,]$

Remarque

L'inégalité stricte est possible, les termes de plus haut degré pouvant s'annuler

1.1.2 Egalité de deux polynômes

Théorème 1.

Soient P et Q deux fonctions polynômes, $P = Q$ signifie que :

- $\deg(P) = \deg(Q)$
- les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux

Cas particulier : $P = 0$ est le polynôme nul, ce qui signifie que tous ses coefficients sont nuls

Exemple

- Les deux polynômes $Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ et $P(x) = x^4 + 1$ sont égaux :

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\
&= x^4 - \sqrt{2}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x + 1 \\
&= x^4 + 1 \\
Q(x) &= P(x)
\end{aligned}$$

- Les polynômes $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $R(x) = ax^2 + bx + c$ sont égaux pour $a = 2 \quad b = -3 \quad c = 4$

1.1.3 Racine d'un polynôme

Définition 2.

On appelle **racine** d'une fonction polynôme P toute solution x_0 de l'équation $P(x) = 0$

Exemple

- Les racines de la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$ sont -3, 1 et 2

- Les fonctions polynômes du 1^{er} degré $ax + b$ admettent toutes une seule racine $x_0 = -\dfrac{b}{a}$
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle. Par exemple $x^2 + 1$ est strictement positif

Remarque

Une fonction polynôme sans racine réelle est nécessairement de signe constant

Théorème 2.

Une fonction polynôme P de degré n à coefficients réels possède au plus n racines réelles

1.1.4 Factorisation

Théorème 3.

Une fonction polynôme P à coefficients réels de degré n a une racine réelle x_0 si et seulement si on peut factoriser $P(x)$ par $(x - x_0)$. On obtient :

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) \text{ ou } Q \text{ est une fonction polynôme de degré } (n - 1)$$

Remarque

On peut essayer de remplacer la variable x par 1, -1, $0\ldots$ et si la valeur du polynôme est 0, on dit qu'on a trouvé une « racine évidente ».

Démonstration.

Lorsque la fonction polynôme P se factorise en $(x - x_0)Q(x)$, x_0 est une racine évidente. Supposons maintenant que x_0 est une racine de P alors $P(x_0) = 0$. Considérons l'écriture de $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors $P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k$.
Ainsi $P(x) = P(x) - P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - x_0^k\right)$.
En utilisant l'identité remarquable $x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x_0 x^{k-1} + ... + x_0^{k-1})$ pour chaque indice k dans la somme on peut factoriser $(x - x_0)$, un polynôme que l'on note $Q(x)$ apparaît et $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.

Définition 3.

On appelle **racine multiple d'ordre** k d'une fonction polynôme P toute racine réelle x_0 telle que $P(x)$ se factorise par $(x - x_0)^k$ et

$$P(x) = (x - x_0)^k Q(x) \text{ avec } Q(x_0) \neq 0$$

Q est alors une fonction polynôme de degré $(n - k)$.

Division euclidienne

Nous ne ferons pas de théorie sur la division euclidienne avec des polynômes. Nous l'utiliserons simplement pour ce qu'elle est, c'est à dire l'exacte analogue de la divsion euclidienne des entiers que vous connaissez. Ici le rôle joué initialement par les puissances de 10 sera joué par les différentes puissances de l'inconnue.

Théorème 4 (Division euclidienne de polynômes)**.**

Soit $P(X)$ un polynôme de degré p et $D(X)$ un polynôme de degré d alors il existe un unique couple de polynômes $(Q(X), R(X))$ tel que : $P(X) = Q(X)D(X) + R(X)$

Avec $\deg(R) < \deg(D)$.

Méthodes de factorisation

Méthode (Identification des coefficients)**.**

On considère le polynôme f défini par : $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$

Une solution évidente est $x_0 = -1$

donc, il existe un polynôme g de degré $4 - 1 = 3$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)g(x) \\ &= (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d \end{aligned}$$

Les polynômes $3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$ et $ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 3 \\ b+a &=& -1 \\ c+b &=& 1 \\ d+c &=& 11 \\ d &=& 6 \end{array}\right. \quad \text{donc :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 3 \\ b &=& -4 \\ c &=& 5 \\ d &=& 6 \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{f(x) = (x+1)(3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)}$

Méthode (Division euclidienne).

On considère le polynôme f défini par : $f(X) = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$

Une solution évidente est $X_0 = 1$ donc, $f(X)$ est divisible par $(X - 1)$

On effectue la division euclidienne de $f(X)$ par $(X - 1)$ en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
X^4 & - & 7X^3 & + & 17X^2 & - & 17X & + & 6 & X-1 \\ \cline{10-10}
X^4 & - & X^3 & & & & & & & X^3-6X^2+11X-6 \\ \cline{1-9}
 & - & 6X^3 & + & 17X^2 & - & 17X & + & 6 & \\
 & - & 6X^3 & + & 6X^2 & & & & & \\ \cline{2-9}
 & & & + & 11X^2 & - & 17X & + & 6 & \\
 & & & + & 11X^2 & - & 11X & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & - & 6X & + & 6 & \\
 & & & & & - & 6X & + & 6 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{f(X) = (X - 1)(X^3 - 6X^2 + 11X - 6)}$

Exemple

On souhaite factoriser $P(x) = x^3 - 7x + 6$

1. Calculer $P(2)$
2. Trouver une racine évidente
3. Conclure sur la factorisation

- $P(2) = 0$, on peut factoriser par $(x - 2)$
- $P(1) = 0$, on peut factoriser par $(x - 1)$
- $P(x) = (x - 2)(x - 1)Q(x)$ avec $\deg(P) = \deg(x - 2) + \deg(x - 1) + \deg(Q)$

  donc, $\deg(Q) = 3 - 1 - 1 = 1$

$$\begin{array}{rcl}
P(x) & = & (x-2)(x-1)(ax+b) \\
 & = & (x^2 - x - 2x + 2)(ax+b) \\
 & = & (x^2 - 3x + 2)(ax+b) \\
 & = & ax^3 + bx^2 - 3ax^2 - 3bx + 2ax + 2b \\
 & = & ax^3 + (b-3a)x^2 + (-3b+2a)x + 2b \\
P(x) & = & x^3 - 7x + 6
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b - 3a & = & 0 \\ -3b + 2a & = & -7 \\ 2b & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{donc :} \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 3 \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{P(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)}$

Chapitre 2

Polynômes de degré 2

Objectifs du chapitre :

- Savoir mettre un trinôme sous sa forme canonique
- Savoir trouver les solutions réelles d'une équation de degré deux à coefficients réels
- Savoir factoriser un trinôme
- Savoir dresser un tableau de signe, un tableau de variation d'un polynôme de degré deux
- Connaître les différents types de représentation graphique d'un polynôme de degré deux

2.1 Second degré

2.1.1 Fonction polynôme du second degré

Définition 4.

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction P de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**

Exemple

- $P(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$
- $P(x) = 4x^2$, on a : $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$
- $2x + 1$, $6x^3 + 4x + 2$ et $(x-1)^2 - x^2$ ne sont pas du second degré

2.1.2 Forme canonique

Définition 5.

Une expression de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ s'appelle la **forme canonique** du trinôme

Le principe est de transformer un trinôme du second degré en utilisant les identités remarquables

Exemple

- $x^2-8x+7=(x-4)^2-16+7=(x-4)^2-9$
- Dans ce cas, les racines sont alors facilement identifiables :
  résoudre $x^2-8x+7=0$ revient à résoudre $(x-4)^2-9=0$
- $$\begin{aligned}(x-4)^2-9=0 &\iff (x-4)^2=9\\ &\iff x-4=3 \text{ ou } x-4=-3\\ &\iff x=7 \text{ ou } x=1\end{aligned}$$
- $\mathcal{S}=\{1;7\}$

Transformation de l'écriture ax^2+bx+c **:**

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\ ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad \text{avec } \Delta=b^2-4ac\end{aligned}$$

2.1.3 Solutions de l'équation et factorisation

Résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$ ou encore $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$

Dans cette expression, tout est positif sauf Δ, cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c

- $\Delta<0$: l'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser
- $\Delta=0$: l'équation a une solution double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
  le trinôme se factorise sous la forme $a(x-x_0)^2$
- $\Delta>0$: l'équation possède 2 solutions réelles : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  le trinôme se factorise sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$

Exemple

- $-6x^2 + x + 1 = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$

  Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{-12} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{-12} = -\frac{1}{3}$$

  $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ et la forme factorisée de P est : $P(x) = -6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

- $5x^2 + 6x + 2 = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$

  Le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution réelle

  $S = \varnothing$ et P ne se factorise pas

- $2x^2 + 5x + \frac{25}{8} = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \frac{25}{8} = 0$

  Le discriminant est nul, il y a une solution double : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4}$

  $S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ et la forme factorisée de P est : $P(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

Remarque

Si Δ est positif, on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= ax^2 - aSx + aP \text{ où } S \text{ est la somme et } P \text{ le produit des deux racines} \end{aligned}$$

On a alors : $\boxed{S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}}$

Exemple

Trouver les racines du polynôme $2x^2 - 5x + 3$

- $x_1 = 1$ est une racine évidente

- L'autre racine peut se déterminer facilement grâce à S ou P :

  $S = x_1 + x_2 = 1 + x_2 = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$ d'où $x_2 = \frac{3}{2}$

  $P = x_1x_2 = 1 \times x_2 = \frac{3}{2} =$ d'où $x_2 = \frac{3}{2}$

2.1.4 Signe du trinôme

Étudions le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$

— Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	$\vert$	signe de a	$\vert$	signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - x_2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

— Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		signe de a	$\vert$	signe de a	
$(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x - x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

— Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de $P(x)$ est donc le même que celui de a

Théorème 6.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent

Exemple

- $f(x) = -6x^2 + x + 1$
  Le discriminant est positif, f est du signe de $a = -6$, donc négative sauf entre ses racines $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$
  Le discriminant est négatif, f est du signe de $a = 5$, donc positive sur $\mathbb{R}$
- $2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$
  Le discriminant est nul, f est du signe de $a = 2$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et nulle en $x_0 = -\dfrac{5}{4}$

2.1.5 Représentation graphique

Dans un repère (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

Propriété 2.

La fonction polynôme de degré 2 définir sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est :

- strictement décroissante puis strictement croissante **si** $a > 0$,
- strictement croissante puis strictement décroissante **si** $a < 0$,

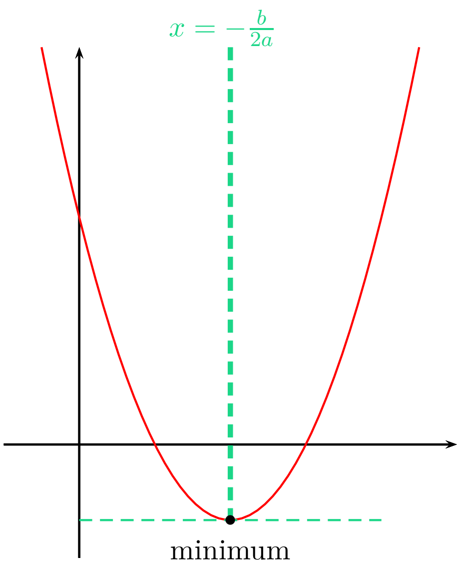
Tableau de variations et représentation graphique :

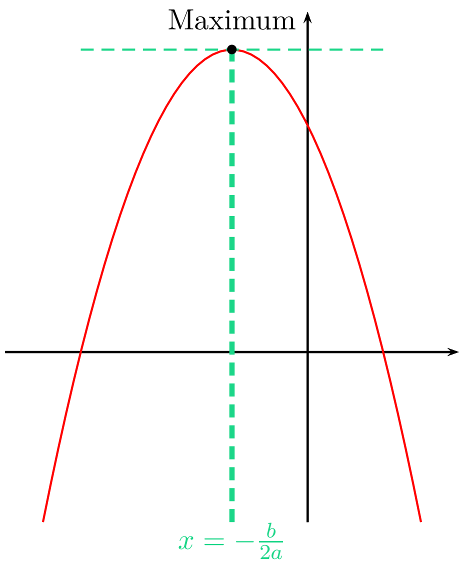
$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$-\infty$





Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**, cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Lorsque cet axe de symétrie est l'axe des ordonnées, on parle de fonction **paire**. Nous reviendrons sur ça dans une prochaine leçon.

Méthodes pratiques pour déterminer les variations de $P(x) = ax^2 + bx + c$

Méthode (Utilisation de la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$.).

Si $a > 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \geq 0$

donc, $a(x-\alpha)^2+\beta \geq \beta$

le minimum β est atteint lorsque

$a(x-\alpha)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Si $a < 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \leq 0$

donc, $a(x-\alpha)^2+\beta \leq \beta$

le maximum β est atteint lorsque

$a(x-\alpha)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Exemple

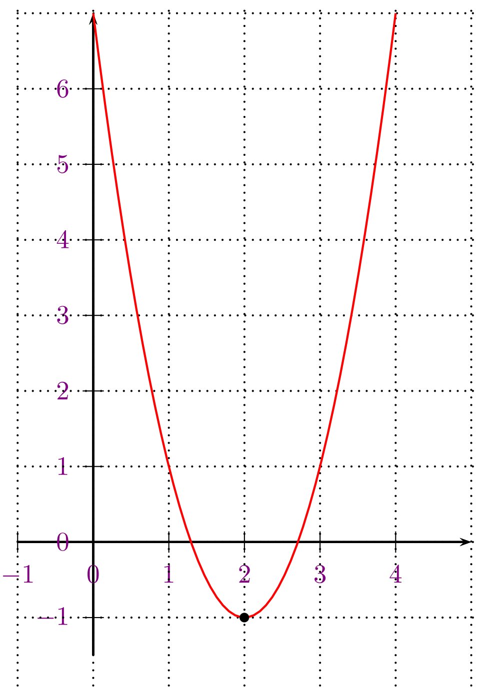
Soit $P(x) = 2(x-2)^2 - 1$, on obtient :

P est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$,

croissante sur $[\ 2\ +\infty\ [$.

Son minimum atteint en 2 vaut -1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



Exemple

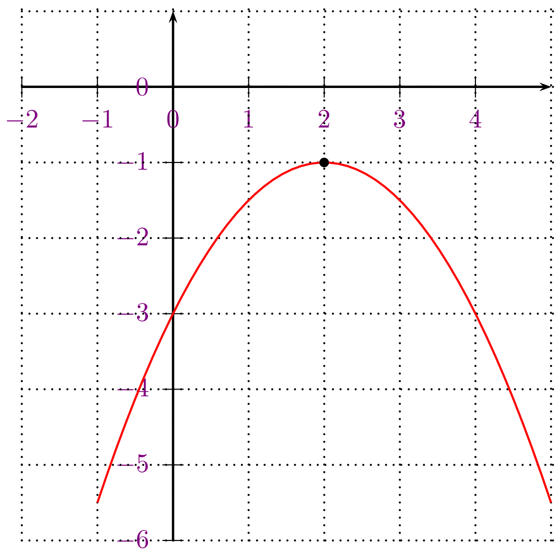
Soit $P(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$, on obtient :

P est croissante sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$,

décroissante sur $[\ 2\ +\infty\ [$.

Son maximum atteint en 2 vaut -1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$



Méthode (Utilisation de la propriété de symétrie de la courbe.).

Puisque la courbe est symétrique, si l'on trouve deux points A et B de cette courbe de même ordonnée, on en déduit que leur milieu I est situé sur l'axe de symétrie.

L'abscisse de I est donc l'abscisse de l'extremum.

Exemple

Soit $P(x) = x^2 - 4x + 3$:

On recherche par exemple les 2 points A et B qui ont pour ordonnée $y = 3$.

Pour cela, on résout $P(x) = 3$:

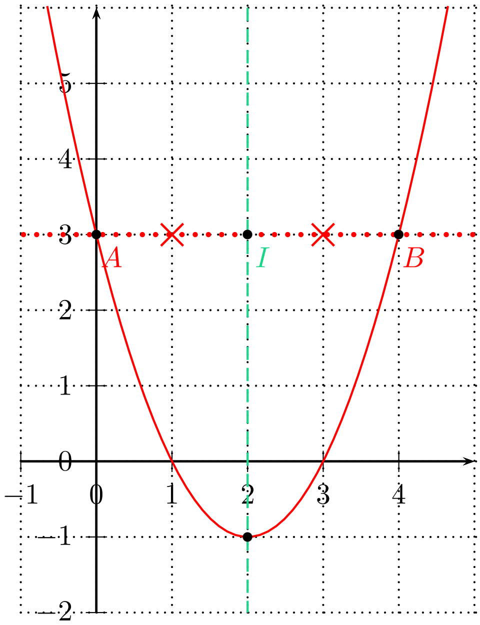
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 3 &\iff x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

L'abscisse du minimum est donc $x = \frac{0+4}{2} = 2$.

L'ordonnée vaut $P(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$.

P est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$,

croissante sur $[\ 2\ \ +\infty\ [$.



Méthode (Utilisation de $x = -\frac{b}{2a}$.).

Le point d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$ constitue un minimum ou un maximum des valeurs de $P(x)$.

Ceci dépend du signe de a.

On peut donc déduire les variations du polynôme sur les intervalles $\left]-\infty\ ;\ -\frac{b}{2a}\right]$ et $\left[-\frac{b}{2a}\ \ +\infty\right[$.

Exemple

Soit $P(x) = -x^2 - 2x + 3$.

$a = -1$ est négatif et $b = -2$ donc, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$.

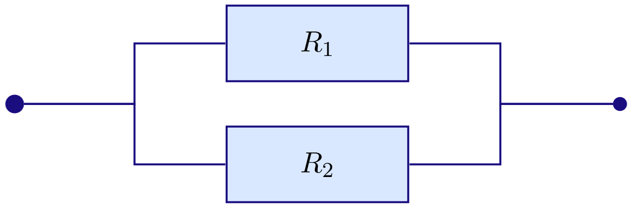
La fonction P est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -1\ ]$ et décroissante sur $[-1\ \ +\infty\ [$.

Son maximum est atteint pour $x - 1$ et vaut $P(-1) = 4$.

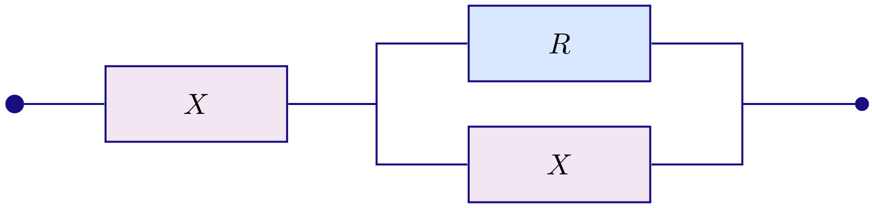
2.1.6 Un exemple d'application

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en série, la résistance du dipôle est $R = R_1 + R_2$

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance du dipôle est $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



Soit $R = 6\,\Omega$, déterminer la résistance X pour que la résistance du montage ci-dessous soit $16\,\Omega$.



Soit R_2 la résistance du dipôle constitué des deux résistances montées en parallèle X et R. Nous avons :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{X} + \frac{1}{R}$$

Soit $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{X} + \frac{1}{6} = \frac{6+X}{6X}$ donc $R_2 = \frac{6X}{6+X}$.
Ainsi, X est un réel positif solution de l'équation

$$X + \frac{6X}{6+X} = 16$$

Alors si $X \neq -6$ (ce qui est le cas) cette équation est équivalente $X(6+X) + 6X = 16(6+X) \Leftrightarrow 6X + X^2 + 6X = 96 + 16X \Leftrightarrow X^2 - 4x - 96 = 0$.

Cherchons les solutions de cette équation du second degré avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = -96$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ d'où : $\Delta = 16 + 4 \times (-96) = 400$.

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -8 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 12$$

Or X est un réel positif donc 12 est la seule solution qui convienne.

La résistance X est égale à 12Ω.

Chapitre 3

Polynômes de degré 3

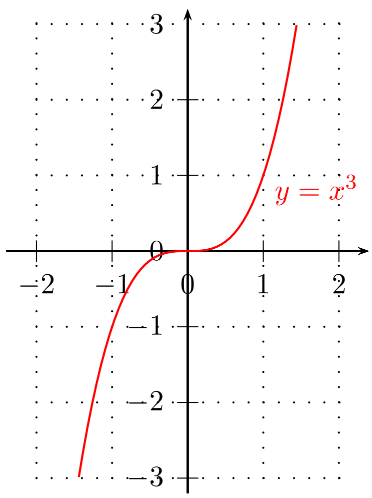
Objectifs du chapitre :

- Savoir résoudre les équations du type $ax^3 + b = c$
- Savoir factoriser un polynôme de degré trois
- Savoir dresser un tableau de signe, un tableau de variation d'un polynôme de degré trois
- Savoir représenter graphiquement un polynôme de degré trois

3.1 Rappel : La fonction cube $x \mapsto x^3$

Définition 6.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3$ est appelée **fonction cube**



x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction cube est **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Nous reviendrons sur ça dans une prochaine leçon.

La courbe représentant la fonction cube dans un repère orthogonal est appelée **cubique**

Propriété 3.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On utilise l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

On va effectuer un raisonnement par disjonction des cas :

— Soient x_1 et x_2 deux réels **positifs**, le signe de ${x_2}^2 + x_1x_2 + {x_1}^2$ est strictement positif. La fonction cube est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

— Soient x_1 et x_2 deux nombres réels **négatif**, le signe de ${x_2}^2 + x_1x_2 + {x_1}^2$ est strictement positif car somme de nombres positifs. La fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

— Soient x_1 et x_2 deux nombres réels **de signe différents**, disons $x_1 < x_2$ alors $x_1^3 < 0$ et $x_2^3 > 0$ donc $x_1^3 < x_2^3$.

Conclusion : La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3.2 Résolution d'équation $x^3 = c$

Propriété 4.

On considère le réel c. L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution qui est :

$$x = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$$

Exemple

1. On veut résoudre l'équation $x^3 = 64$.

   D'après la propriété précédente, $x^3 = 64$ admet une unique solution positive $x = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$.

2. On veut résoudre l'équation $x^3 = -48$.

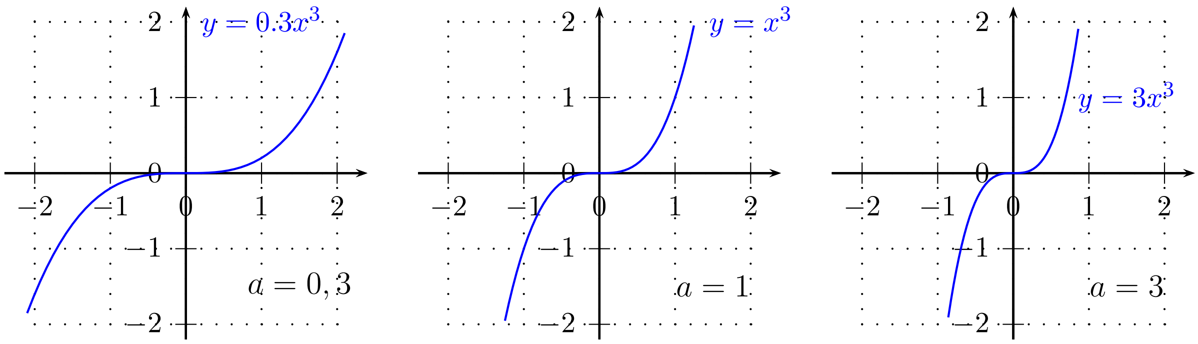
   D'après la propriété précédente, $x^3 = -48$ admet une unique solution positive $x = (-48)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-48} \simeq -3,634$ à 0.001 près

3.3 De la fonction cube aux fonctions polynômes de degré 3

3.3.1 Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$

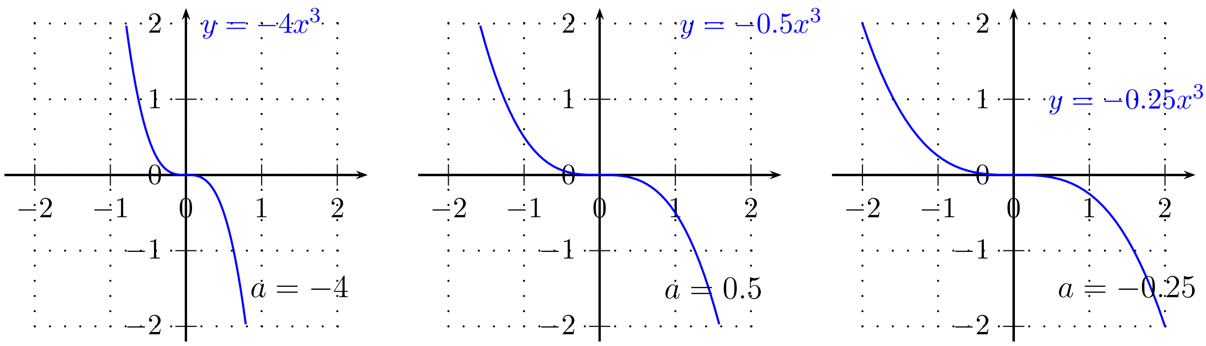
Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3$ pour différentes valeurs de a :

1. Testons avec plusieurs valeurs de a positive :



On voit que plus la valeur de a augmente, plus la courbe représentative de la fonction se « resserre » autour de l'axe des ordonnées.

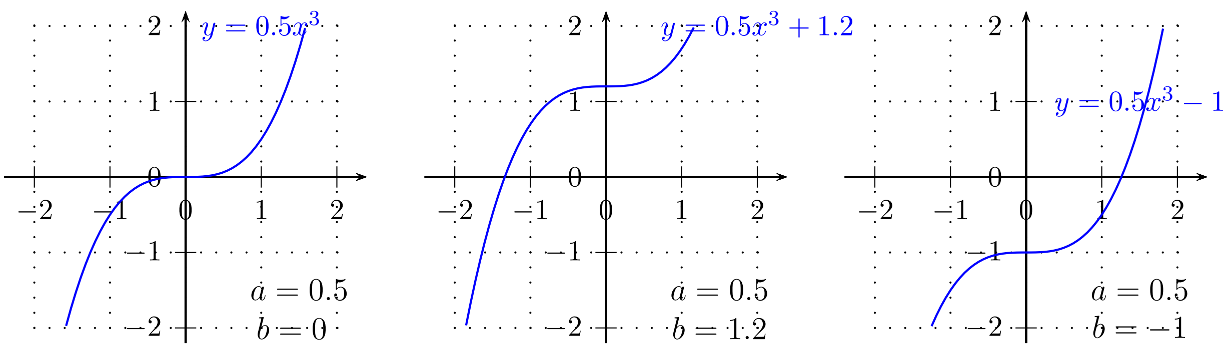
2. Testons avec plusieurs valeurs de a négative :



Si la valeur de a est négative, la courbe représentative de la fonction cube semble « s'inverser ».

3.3.2 Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$ pour différentes valeurs de b :



On remarque que la courbe se décale de b, vers le haut si b est positif, ou vers le bas si b est négatif.

3.4 Forme développée

Définition 7.

Une fonction f polynôme de degré 3 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b, c,$ et d des réels et $a \neq 0$

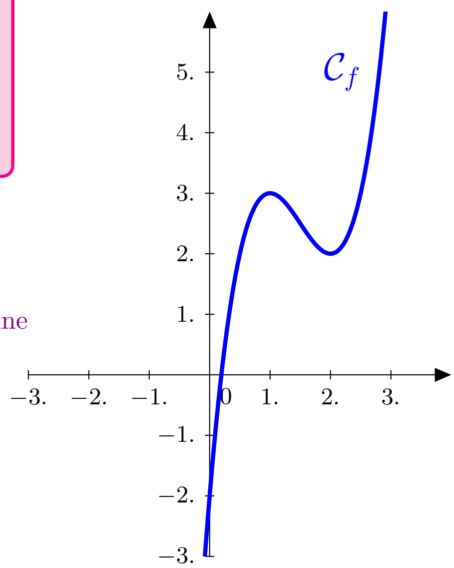
Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ est une fonction polynôme de degré 3.

On a :

1. $a = 2$
2. $b = -9$
3. $c = 12$
4. $d = -2$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-contre :



3.5 Forme factorisée et racine d'un polynôme de degré 3

Une fonction polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle. Cela tiens au fait, que nous verrons dans la prochaine leçon, que lorsque un polynôme à coefficients réels possède une racine complexe alors **nécessairement** son conjugué est aussi racine du polynôme.
Ici nous nous intéressons seulement aux racines réelles du polynôme P ainsi il peut prendre deux formes de factorisations :

— $P(x) = a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$ où x_1 est l'unique racine réelle du polynôme.

— $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ où P possède alors 3 racines réelles (pas forcément distinctes).

3.5.1 Étude de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$

Tout d'abord remarquons que d'après nos hypothèses le polynôme $x^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle, il est donc de signe constant en l'ocurrence positif.
Ainsi le signe de $a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$ dépend uniquement de a et de $(x - x_1)$.

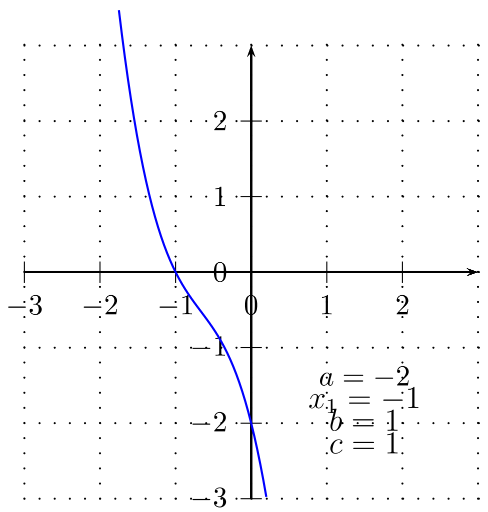
Propriété 5.

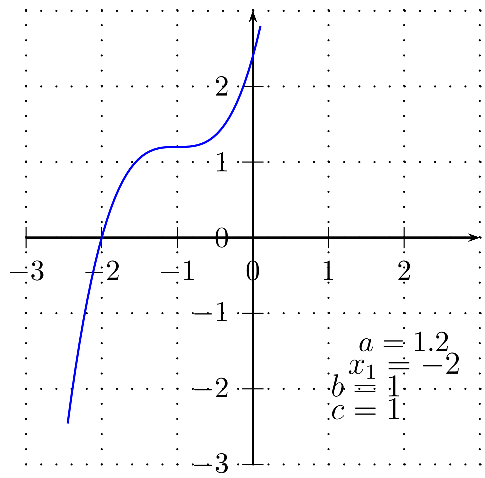
Soit f la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$ avec x_1, a, b, et c des réels.

Le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de -a	0	signe de a	

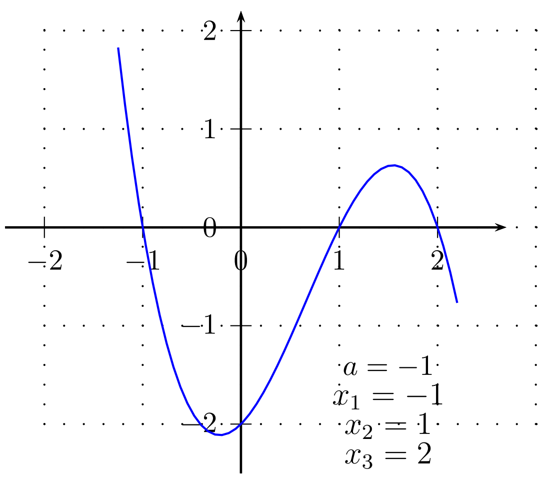
Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$:

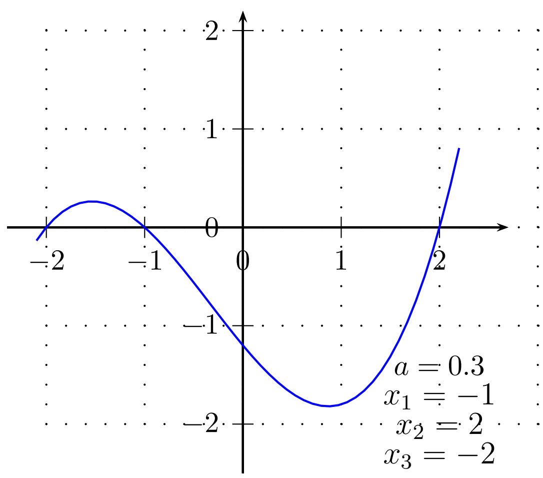




3.5.2 Étude de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ pour différentes valeurs de x_1, x_2 et x_3 :





Remarque

Les racines de f se lisent directement sur le graphique. Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de l'axe des abscisses.

Signe de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Dans la partie précédente, on a observé que la courbe représentative de la fonction f changeait de sens de variation en fonction de la valeur de a.

Puis nous avons vu que la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ s'annulait en x_1, x_2 et en x_3.

En combinant ces deux éléments, on peut établir le tableau de signe la fonction :

Propriété 6.

Soit f la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Avec la convention $x_1 < x_2 < x_3$, le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		signe de -a	0	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Méthode (Établir le tableau de signe d'une fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$).

Construisons le tableau de signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2(x-5)(x+3)(x-4)$$

1. Identifier les coefficients a, x_1, x_2 et x_3. Attention aux signes de ces quantités !

   (a) $a = -2$

   (b) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ et $x_3 = 4$

2. Déterminer le signe de a, la plus grande et la plus petite des valeurs x_1, x_2 et x_3.

   (a) $a = -2$ donc a est négatif.

   (b) $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$ donc $x_2 < x_3 < x_1$.

3. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_2		x_3		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de -a	0	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

En remplaçant par les valeurs de a, x_1 et x_2 :

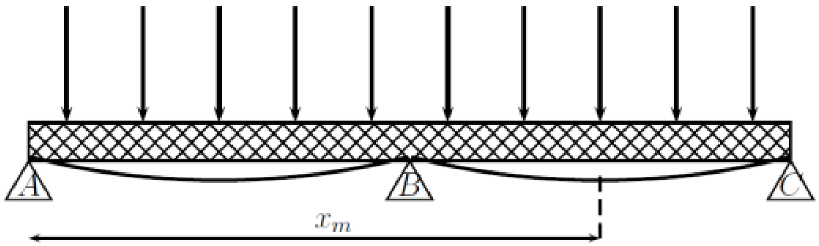
x	$-\infty$		-3		4		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Nous avons établi ce qui précéde en supposant que les racines étaient toutes distinctes. Cela n'est absolument pas une généralité et vous devrez adapter l'étude précédente au cas où il y est des racines multiples.

3.5.3 Un exemple d'application

Une poutre de longueur 2 mètres repose sur trois appuis simples A, B et C, l'appui B étant situé au milieu de $[AC]$.

Elle supporte une charge uniformément répartie de $1000 N.m^{-1}$ (newtons par mètre). Sous l'action de cette charge, la poutre se déforme.



On démontre que le point situé entre B et C où la déformation est maximum, a une abscisse $x_m \neq 1$ qui est solution de l'équation : $32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = 0$

Trouver cette abscisse.

1. Tout d'abord 1 est solution évidente de cette équation. Cela se vérifie en faisant la somme des coefficients. On peut donc factoriser le polynôme par $(x-1)$.

2. On fait la division euclidienne de $32x^3 - 156x^2 + 240x - 116$ par $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
32X^3 & - & 156X^2 & + & 240X & - & 116 & X-1 \\ \cline{8-8}
32X^3 & - & 32X^2 & & & & & 32X^2 - 124X + 116 \\ \cline{1-7}
 & & -124X^2 & + & 240X & - & 116 & \\
 & - & 124X^2 & + & 124X & & & \\ \cline{2-7}
 & & & & 116X & - & 116 & \\
 & & & & 116X & - & 116 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

   Conclusion : $\boxed{32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = (X-1)(32X^2 - 124X + 116)}$

3. Pour résoudre $32X^2 - 124X + 116 = 0$ on utilise les méthode vues précédemment. On trouve $X_1 = \dfrac{31 - \sqrt{33}}{16}$ et $X_2 = \dfrac{31 + \sqrt{33}}{16}$.

   On déduit que $32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = (X-1)\left(X - \dfrac{31 - \sqrt{33}}{16}\right)\left(X - \dfrac{31 + \sqrt{33}}{16}\right)$

4. Pour répondre concrétement à la problématique on donne des approximations à 10^{-2} près des solutions $X_1 \approx 1,58$ et $X_2 \approx 2,3$.

   Finalement $x_m = 1,58m$