CHAPITRE

8 Études de fonctions spéciales

Sommaire

1 Théorème de l'application réciproque

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x de I associe un réel y. Nous voudrions savoir si nous pouvons définir une fonction « retour » qui permette, à partir de y, de revenir à x.

Définition 1.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction.
On dit que f est bijective s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ g(y) = f(g(y)) = y$$

Cette fonction g est appeée **fonction réciproque** de f et on notée f^{-1}.

Théorème 1.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction continue strictement monotone.
Alors :

- f est bijective de J dans I
- f^{-1} est continue strictement monotone de même sens de variation que f.

Remarque

Graphiquement, la courbe de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f s'obtient en appliquant une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.
C'est le cas, par exemple, pour les fonctions logarithme et exponentielle sur $\mathbb{R}$, où encore pour les fonctions carré et racine carrée sur $[0; +\infty[$.

Théorème 2.

Soit f une application continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Corollaire 1.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

2 Fonctions circulaires réciproques

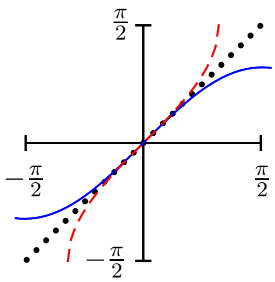
2.1 La fonction arc sinus

Définition 2.

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur $[-1; 1]$.

Cette fonction est appelée **arc sinus** et notée arcsin ou parfois $\sin^{-1}$.



$y = \arcsin x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

Exemple

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{car} \quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Propriété 1.

La fonction arc sinus est dérivalble sur $]1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration.

Pour tout x de $[-1;1]$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$

La fonction dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. Or celle-ci s'annule en $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, pour appliquer le théorème de l'application réciproque, nous excluons ces valeurs et donc leurs images -1 et 1 par la fonction sinus . En dérivant les deux membres de l'égalité on obtient :

$\sin'(\arcsin(x)) \times \arcsin'(x) = \cos(\arcsin(x)) \times \arcsin(x) = 1$ pour $x \in]-1;1[$

La fonction cosinus ne s'annule pas sur $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

Or $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$

Finalement $\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

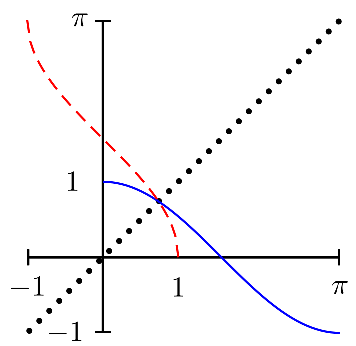
2.2 La fonction arc cosinus

Définition 3.

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur $[-1;1]$.

Cette fonction est appelée **arc cosinus** et notée arccos ou parfois $\cos^{-1}$.



$y = \arccos x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

Propriété 2.

La fonction arc cosinus est dérivable sur $]-1;1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1;1[\quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

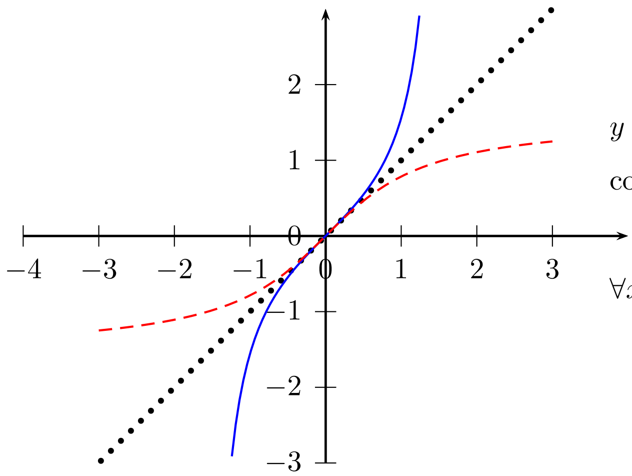
2.3 La fonction arc tangente

Définition 4.

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est appelée **arc tangente** et notée arctan ou parfois $\tan^{-1}$.



$y = \arctan x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propriété 3.

La fonction arc tangente est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

3 Les fonctions e^{it} et e^{at}

Définition 5.

Pour tout nombre réel θ et tout nombre complexe $a = \alpha + i\beta$, on pose :

- $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$
- $e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$

Démonstration.

$e^{at} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$

Remarque

On peut retrouver ainsi les formules de Moivre et d'Euler, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad ; \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4 Dérivée et primitive d'une fonction à valeurs complexes

Définition 6.

Une fonction d'une variable réelle à valeur complexe est une fonction qui à un nombre réel associe un nombre complexe.

Exemple

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3x^2 i$ est à valeur complexe.

Remarque

On peut considérer que la fonction f est constituée de deux « sous » fonctions :

$f_1(x) = 2x$ *et* $f_2(x) = -3x^2$.

On a ainsi $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

Propriété 4.

Soit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ une fonction continue d'une variable réelle à valeur complexe.

- Si f_1 et f_2 sont dérivables, alors f est dérivable et $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$
- Si F_1 et F_2 sont les primitives de f_1 et f_2 alors F est intégrable et $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$

Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3x^2 i$.

- $f'(x) = 2 - 6ix$
- $F(x) = x^2 - ix^3$