CHAPITRE

10 Équations Différentielles

Les équations différentielles ont été inventées par Newton (1642-1727). C'est le début de la physique moderne et l'utilisation de l'analyse pour résoudre la loi de la gravitation universelle conduisant à l'ellipsité des orbites des planètes dans le système solaire. Jacques Bernoulli (1654-1705) Mathématicien énonça les premiers principes du calcul infinitésimal et fit figure de pionnier dans la théorie des probabilités. Il utilisa le calcul infinitésimal dans un grand nombre de problèmes et fut le premier à employer le mot « intégrale ? ». Il a également laissé son nom à une équation différentielle dont il proposa l'intégration (équation de Bernoulli). Leibniz (1646-1716) érige l'analyse en discipline autonome, et les réflexions de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) sur la cause générale des vents (1746), contiennent la première théorie sur la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles. Il faut attendre les travaux d'Euler (1707-1783) et de Lagrange (1736-1813) pour voir apparaître les méthodes permettant la résolution des équations linéaires.

Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XVIIIe siècle, Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), introduisit de nouvelles méthodes pour le calcul des variations et l'étude des équations différentielles, qui lui permirent de donner un exposé systématique de la mécanique dans son ouvrage Mécanique analytique (1788). Dans la foulée de Newton, les mathématiciens Laplace, Lagrange et Gauss développent les méthodes de la théorie des perturbations ; ces méthodes permettent par exemple de déterminer les perturbations séculaires (i.e. petites par rapport au mouvement annuel) des orbites des planètes.

De nos jours beaucoup de mathématiciens, à commencer par Poincaré (1854-1912), ont montré que les solutions d'équations différentielles peuvent être très instables ; ces équations peuvent conduire à des situations chaotiques à cause d'une grande sensibilité aux conditions initiales. Ces mathématiciens ont contribué à détruire le mythe que l'on pouvait décrire le monde uniquement à partir d'équations différentielles qu'ils suffisaient alors de résoudre ! Par exemple l'atmosphère de la terre peut être simulée par des équations différentielles qui vont permettre de calculer à partir de données initiales le temps à des instants donnés successifs. Mais on sait aussi qu'entre une situation calculée par ordinateur et une situation météo réelle il y a une différence qui va en s'accroissant à tel point qu'au bout de 8 à 10 jours il peut avoir une situation simulée qui n'a rien de commun avec la situation réelle. Il y a une telle sensibilité aux conditions initiales qu'on dit même que le vol d'un papillon au dessus de Pékin peut entraîner l'apparition d'un cyclone dans le sud des États-Unis quelques semaines après.

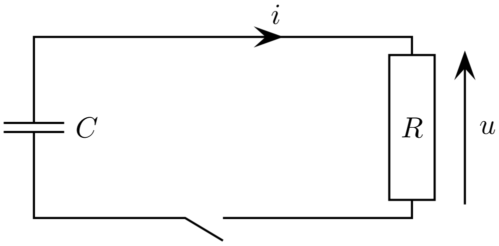
Sommaire

Une **équation différentielle** est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s).

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

Décharge d'un condensateur

On considère le circuit RC suivant :



On a les relation $u(t) = Ri(t)$

et $i(t) = -\dfrac{dq}{dt} = -q'(t)$ avec la charge $q(t) = Cu(t)$.

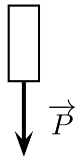
Ainsi, $u(t) = Ri(t) = R\Big(Cu(t)\Big)'$,

soit encore l'équation

$$(E): \ RCu'(t) + u(t) = 0$$

Parachute

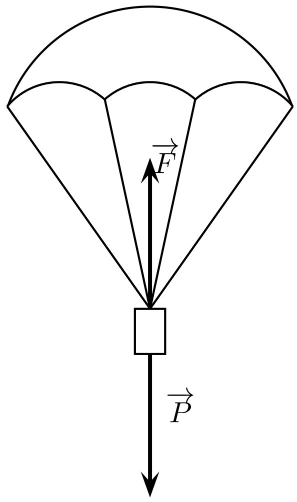
Dans le vide, la vitesse d'un objet de masse m soumis à son seul poids $P = mg$ vérifie l'équation (principal fondamental de la dynamique) : $mv'(t) = mg$, soit aussi $v'(t) = g$.



Si on considère maintenant les frottements de l'air sur l'objet, une force supplémentaire, proportionnelle à la vitesse de l'objet, s'oppose à son déplacement.

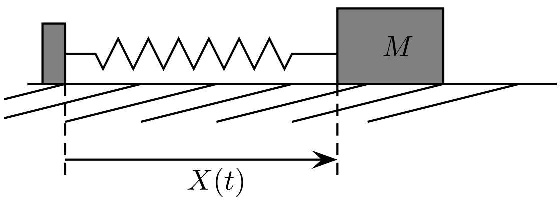
La vitesse de l'objet est maintenant solution de l'équation

$$(E): \ mv'(t) + kv(t) = mg$$



Objet retenu par un ressort.

On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.



On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.

On admet que la fonction X est solution de l'équation

$$(E): X'' + 100X = 0$$

Toutes ces équations sont des **équations différentielles** : des équations dont l'inconnue est une fonction $u(t)$, $v(t)$, $X(t)$, et qui utilisent ses dérivées $u'(t)$, $v'(t)$, $X''(t)$.

Objectifs du chapitre :

- Savoir résoudre des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 et 2
- Savoir déterminer si une fonction est solution particulière d'une équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 avec second membre
- Aborder la détermination de solution particulières de certaines équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 avec second membre
- Savoir résoudre des problèmes de Cauchy d'ordre 1 et 2

1 Équations différentielles linéaire d'ordre 1

1.1 Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Définition 1.

Soient a, b deux nombres réels et $c(x)$ une fonction réelle continue.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** toute équation du type :

$$(E) : ay'(x) + by(x) = c(x).$$

Lorsque $c = 0$, on parle **d'équation homogène**.

Remarque

— *Dans ce qui suit nous nous plaçons dans le cas où $c(x)$ est une fonction constante.*

— *Lorsque $a \neq 0$, résoudre une équation différentielle du type $ay'(x) + by(x) = c$ revient systématiquement à résoudre l'équation $y'(x) + \frac{b}{a}y(x) = \frac{c}{a}$.*
La plupart du temps on se ramènera à ce type d'équations.

— *La forme de ce type d'équations différentielles « oblige » les solutions à être des fonctions au moins $\mathcal{C}^1$.*

1.1.1 Équation homogène $y' + ay = 0$

Ici autant que possible on abrégera $y(x)$ en y qui reste une fonction de x. Considérons l'équation homogène $y' + ay = 0$ alors on a : $y' + ay = 0 \iff y' = -ay$. Si l'on suppose que y ne s'annule pas en un point alors par continuité il existe un intervalle I où $y \neq 0$ et on peut supposer $y > 0$.
Par suite on peut écrire $\frac{y'}{y} = -a$ et en primitivant on obtient $\ln(y) = -ax + k$.
Finalement en passant par l'exponentielle on obtient $y(x) = e^{-ax+k} = Ce^{-ax}$.

Sous certaines conditions nous avons un candidat potentiel pour solution à notre équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Dans le cas où $y < 0$ une primitive de $\frac{y'}{y}$ est $\ln(|y|)$, alors $|y| = Ce^{-ax}$ (avec $C > 0$) et finalement $y = -Ce^{-ax}$ qui est la même forme de solution que précédemment.

En fait on vient même de montrer que dès lors que $y(x) \neq 0$ les seules solutions possibles sont de la forme $y(x) = Ce^{-ax}$ et différent simplement de la constante C.

Entre autre la seule solution à notre équation différentielle qui s'annule en un point est la fonction nulle elle même.

Théorème 1.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y : x \mapsto ke^{-ax}$$

Où k est une constante réelle quelconque.

Exemple

On cherche l'ensemble des solutions à $y' - 4y = 0$.

En appliquant le théorème précédent ce sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{4x}$

1.1.2 Équation générale $y' + ay = b$

Définition 2.

On appelle **solution particulière** de l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec $b \neq 0$ toute fonction solution de cette équation.

Exemple

On cherche une solution particulière de $y' + 2y = 6$. Il y en a une évidente, la fonction constante $y = 3$ (pour laquelle, $y' = 0$, et donc $y' + 2y = 0 + 2 \times 3 = 6$).

Plus généralement, la fonction constante $y = \frac{b}{a}$ est solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.

En ajoutant alors la solution de l'équation homogène on obtient l'ensemble des solutions :

Théorème 2.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, où k est une constante réelle quelconque.

Exemple

On cherche l'ensemble des solutions à $y' - 4y = 7$.

En appliquant le théorème précédent ce sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{4x} - \dfrac{7}{4}$

1.1.3 Équation avec une condition initiale

Théorème 3.

L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x_0) = y_0$.

1.2 Équation différentielle d'ordre 1 à coefficients variables

Définition 3.

Soient a, b et c trois fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I.

On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre (EDLO1)** toute équation du type :

$$(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

Au fil de cette partie nous allons travailler sur un exemple.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x - 1)e^x$.

   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Exemple

Dans cet exemple, les fonctions a, b et c sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $a(x) = 1$, $b(x) = -2$ et $c(x) = xe^x$.

1.2.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Soit $(E_0) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, cette équation est appelée équation différentielle sans second membre, ou encore équation homogène associée à (E). On notera EDH.
a étant une fonction ne s'annulant pas sur I, on peut encore écrire $(E_0) : y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$.
On peut alors tenir le même raisonnement qu'avec les équations différentielles linéaires à coefficients constants à cela près que maintenant nous avons $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$ et que l'on doit primitiver la fonction $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I.

Théorème 4.

Soient a et b étant des fonctions continues sur I avec a ne s'annulant pas sur I.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y'(x)+\dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$ est l'ensemble des fonctions y_H définies sur I par :

$$y_H(x) = ke^{-G(x)}$$

où k est une constante réelle et G une primitive de la fonction $\gamma(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$.

Remarque

Si on remplace a et b par des constantes, on retrouve le théorème vu précédemment.

Exemple

Dans notre exemple, on souhaite résoudre $(E_0) : y'(x) - 2y(x) = 0$.
On a $\gamma(x) = -2$ et donc $G(x) = -2x$. La solution générale est alors du type $y_0(x) = ke^{2x}$.

1.2.2 Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition 4.

On appelle **solution particulière** de l'équation différentielle $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation. On notera y_P de telles solutions.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les « y » par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre.

Exemple

Dans notre exemple, on nous demande de montrer que la fonction g est une solution particulière de (E) :

- Calcul de la dérivée :

  $g(x) = (-x-1)e^x$ donc $g'(x) = (-1)e^x + (-x-1)e^x = (-x-2)e^x$.

- Remplacement dans l'équation homogène :

  $g'(x) - 2g(x) = (-x-2)e^x - 2(-x-1)e^x = (-x-2+2x+2)e^x = xe^x$.

- g est donc bien une solution particulière de (E).

1.2.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Proposition 1 (Principe de superposition)**.**

Soit $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ avec a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I.

Si y_1 est solution de l'équation $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 est solution de l'équation $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de (E).

Démonstration.

Il suffit de d'ajouter les deux équations en ayant remplacé y par y_1 et y_2 puis d'utiliser la linéarité de la dérivation.

Théorème 5.

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où y_H est la solution de l'équation sans second membre (E_0) et y_P une solution particulière de l'équation complète (E).

Démonstration.

Utiliser la proposition précédente.

Exemple

Dans notre exemple, on a $y_0(x) = ke^{-2x}$ et $y_p(x) = g(x) = (-x-1)e^x$.

Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = ke^{-2x} + (-x-1)e^x$.

1.2.4 Unicité de la solution sous condition initiale

Définition 5 (Problème de Cauchy)**.**

On appelle **problème de Cauchy (d'ordre 1)** la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, x_0 est un point de I et y_0 un élément donné de $\mathbb{R}$.

Théorème 6 (Admis)**.**

Un problème de Cauchy d'ordre 1 admet une unique solution sur l'intervalle I où il est défini.

Exemple

Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

- On a alors : $f(0) = 0 \iff ke^{-2\times 0} + (-0-1)e^0 = 0 \iff k - 1 = 0 \iff k = 1$.
- Soit $f(x) = e^{-2x} + (-x-1)e^x$.

1.3 Recherche d'une solution particulière

Cette partie est dédiée aux différentes méthodes pour déterminer des solutions particulières. Dans un premier temps nous nous intéresserons au cas d'une EDLO1 **à coefficients constants** avec second membre d'un des types qui suit :

— Polynomial

— Somme de fonctions trigonométriques

— Produit d'un polynome ou de fonctions trigonométriques et d'une exponentielle

Ensuite nous aborderons une méthode plus générale.

1.3.1 Les cas particuliers

Si les coefficients de l'équation différentielle sont des constantes et qu'on ne devine pas une solution particulière de l'équation différentielle, on pourra dans certains cas particuliers utiliser les méthodes suivantes :

— dans le cas où le second membre est un polynôme, on cherche la solution sous la forme d'un polynôme de même degré ;

— dans le cas où le second membre est une combinaison linéaire de $\sin \omega x$ et $\cos \omega x$, on cherche la solution sous la forme $A\ \cos \omega x + B\ \sin \omega x$;

— dans le cas où le second membre est de la forme $A(x)\ e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $A(x)$ un polynôme, on cherche la solution sous la forme $B(x)\ e^{kx}$ avec $deg(A) = deg(B)$ ou $deg(A) + 1 = deg(B)$ suivant les cas ;

— dans le cas où le second membre est de la forme $C(x)\ e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $C(x)$ une combinaison linéaire de $\sin \omega x$ et $\cos \omega x$, on cherche la solution sous la forme $D(x)\ e^{kx}$ avec $D(x) = (A\ \cos \omega x + B\ \sin \omega x)$.

Exemple (Résoudre l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$.)

L'équation homogène associée est $y'(x) + 2y(x) = 0$. Sa solution générale est $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$.

La recherche d'une solution particulière consiste à chercher une solution sous la forme $ax^2 + bx + c$.

Si l'on pose $y(x) = ax^2 + bx + c$ on a alors $y'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{aligned}
y(x) \text{ est solution de } (E) &\iff y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3 \\
&\iff 2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3 \\
&\iff 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3 \\
&\iff \begin{cases} 2a & = 1 \\ 2a + 2b & = -2 \\ b + 2c & = 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = \dfrac{1}{2} \\ b & = -\dfrac{3}{2} \\ c & = \dfrac{3}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

Par principe de superposition, la solution générale de (E) est donc $y(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

Exemple (Résoudre l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = 2\cos(2x)$.)

L'équation homogène associée est $y'(x) - y(x) = 0$. Sa solution générale est $y(x) = C\mathrm{e}^{x}$.

La recherche d'une solution particulière consiste à chercher une solution sous la forme $a\cos(2x) + b\sin(2x)$.

Si l'on pose $y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ on a alors $y'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}
y(x) \text{ est solution de } (E) &\iff y'(x) - y(x) = 2\cos(2x) \\
&\iff -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) - (a\cos(2x) + b\sin(2x)) = 2\cos(2x) \\
&\iff (-2a - b)\sin(2x) + (2b - a)\cos(2x) = 2cos(2x) \\
&\iff \begin{cases} -2a - b & = 0 \\ 2b - a & = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = \dfrac{-2}{5} \\ b & = \dfrac{4}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est $y(x) = \frac{4}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$.
Par principe de superposition, la solution générale de (E) est donc $y(t) = ke^x + \frac{4}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$.

Exemple (Résoudre l'équation différentielle $y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = (3x^2 - x + 1)e^{2x}$.)
L'équation homogène associée est $y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = 0$. Sa solution générale est $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}$.
La recherche d'une solution particulière consiste à chercher une solution sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^{2x}$.
Si l'on pose $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ on a alors $y'(x) = (2ax^2 + (2b + 2a)x + 2b + c)e^{2x}$.

$$\begin{aligned}
y(x) \text{ est solution de } (E) &\iff y'(x)) - \frac{1}{2}y(x) = (3x^2 - x + 1)e^{2x} \\
&\iff (2ax^2 + (2b + 2a)x + 2b + c)e^{2x} - \frac{1}{2}\left((ax^2 + bx + c)e^{2x}\right) = (3x^2 - x + 1)e^{2x} \\
&\iff (2ax^2 + (2b + 2a)x + 2b + c) - \frac{1}{2}\left((ax^2 + bx + c)\right) = 3x^2 - x + 1 \\
&\iff \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{3}{2}b + 2a\right)x + 2b + \frac{1}{2}c = 3x^2 - x + 1 \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{3}{2}a & = 3 \\ \left(\dfrac{3}{2}b + 2a\right) & = -1 \\ 2b + \dfrac{1}{2}c & = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = 2 \\ b & = -\dfrac{10}{3} \\ c & = \dfrac{46}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est $y(x) = 2x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{46}{3}$.
Par principe de superposition, la solution générale de (E) est donc $y(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + \left(2x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{46}{3}\right)e^{2x}$.

Si l'on n'est pas dans le cadre de ces méthodes, on doit utiliser la méthode générale de « variation de la constante ».

1.3.2 Méthode de la variation de la constante

Le principe de la méthode (inventée par Laplace : http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_de_Lap) est de considérer que la constante dans la forme générale des solutions de l'équation homogène est une variable $C(x)$ (d'où le nom de la méthode). Bien sûr il est nécessaire de supposer que $C(x)$ est une fonction dérivable sur l'intervalle d'étude.

On dérive la solution de l'EDH puis on réinjecte dans l'équation avec second membre afin d'obtenir une expression pour $C'(x)$ que l'on cherchera à primitiver.

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ xy'(x) + y(x) = e^x.$

Première étape : On résout l'équation homogène $(E_0)\ :\ xy' + y = 0$

Sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$, on a $\dfrac{-b(x)}{a(x)} = -\dfrac{1}{x}$ dont une primitive est $A(x) = -\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$, les solutions de (E_0) sont donc de la forme $y = Ce^{\ln(\frac{1}{x})} = \dfrac{C}{x}$ avec C un réel.

Deuxième étape : On rend variable la constante.

On cherche **une** solution de l'équation différentielle (E) de la forme $y_0(x) = \dfrac{C}{x}$ où cette fois ci $C : x \mapsto C(x)$ est une fonction dérivable. On a donc $\quad y_0'(x) = \dfrac{C'(x) \times x - 1 \times C(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned}
y_0(x) \text{ est une solution de } (E) &\iff xy_0'(x) + y_0(x) = \mathrm{e}^x &&\iff x\left(\frac{C'(x) \times x - 1 \times C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x} = \mathrm{e}^x \\
&\iff C'(x) - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = \mathrm{e}^x &&\iff C'(x) = \mathrm{e}^x \\
&\iff C(x) = \mathrm{e}^x + k
\end{aligned}$$

On a donc $y_0(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + k}{x}$.

Troisième étape : Conclusion

On applique le principe de superposition : les solutions de l'équation différentielle (E) sont

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\mathrm{e}^x + k}{x} = \frac{C + \mathrm{e}^x + k}{x} = \frac{\mathrm{e}^x + D}{x} \text{ avec } k + C = D \text{ un réel.}$$

Il arrive que des conditions initiales soient précisées dans l'énoncé. Par exemple $y(1) = e$ on obtient alors $D = 0$ et la solution est donc $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

Remarque

Contrairement aux cas précédents, les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ de l'équation de cet exemple ne sont pas constants. On ne doit donc pas chercher une solution particulière de l'EDL sous la forme ke^x. En fait, cette recherche aboutirait à un système sans solution. Dans le cas présent, on aurait $y_0(x) = ke^x$ et $y_0'(x) = ke^x$.

$$\begin{aligned}
y_0(x) \textit{ est solution de } (E) &\iff xy_0'(x) - y(x) = e^x &&\iff xke^x + ke^x = e^x \\
&\iff (xk + k)e^x = e^x &&\iff xk + k = 0x + 0 \\
&\iff \begin{cases} k &= 0 \\ k &= 1 \end{cases} &&\iff \ ????
\end{aligned}$$

Il faut bien vérifier que $a(x) \neq 0$ sur l'intervalle d'étude.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette première partie nous allons nous intéresser à une équation différentielle assez célèbre en physique : **l'équation d'oscillateur harmonique**. De façon générale, un oscillateur est un système dont l'évolution dans le temps est périodique. Il est dit de plus harmonique si les oscillations effectuées sont sinusoïdales, avec une amplitude et une fréquence qui ne dépendent que des caractéristiques intrinsèques du système et des conditions initiales.
Le mouvement harmonique privilégie les fonctions sinus (ou cosinus). Ce n'est en rien restrictif, car nous avons vu que tout mouvement périodique (de période T, de fréquence $f = \dfrac{1}{T}$) peut se décomposer en une superposition (comprendre une somme) de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de f. C'est l'analyse de Fourier, que nous avons rencontrée dans le chapitre précédent. Les oscillateurs harmoniques se retrouvent dans plusieurs branches différentes de la physique :

- En mécanique : étude du mouvement d'une masse liée à une ressort, étude du mouvement d'un pendule simple...
- En électrocinétique : étude de l'évolution de la charge d'un condensateur dans un circuit série RLC...
- En chimie : étude des vibrations d'une molécule diatomique, modélisation des liaisons interatomiques dans un solide cristallin...
- En optique : étude de l'interaction des électrons avec un champ électrique (modèle de l'électron élastiquement lié)...

Définition 6.

On appelle **oscillateur harmonique** à un degré de liberté tout système dont l'évolution au cours du temps est décrite par une grandeur $y(x)$ solution de l'équation différentielle :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

avec ω une constante appelée pulsation propre de l'oscillateur.

De la même façon que dans la section précédente, on peut justifier qu'une solution à ce type d'équation doit être au moins de classe $\mathcal{C}^2$. Cherchons un candidat potentiel de solution :
On a $y'' + \omega^2 y = 0 \iff y'' = -\omega^2 y$.

Lorsque $\omega = 1$ on a donc l'équation $y'' = -y$ et les fonctions trigonométriques conviennent.
En effet cos vérifie $\cos' = -\sin$ et donc $\cos'' = (\cos')' = (-\sin)' = -\cos$.
De même, sin vérifie $\sin' = \cos$ et donc $\sin'' = \cos' = -\sin$.

Pour l'équation plus générale, avec ω quelconque, on modifie un peu : soit $f(x) = \cos(\omega x)$, alors f a la forme $f = \cos(u)$ avec $u(x) = \omega x$. Donc $u'(x) = \omega$, alors $f' = -u' \sin(u)$ soit $f'(x) = -\omega \sin(\omega x)$.

On recommence pour obtenir la dérivée seconde f''. $f' = k \sin(u)$ avec la constante $k = -\omega$ et $u(x) = \omega x$ donc $u'(x) = \omega$, alors $(f')' = f'' = ku' \cos(u)$ soit $f''(x) = -\omega^2 \cos(\omega x) = -\omega^2 f$.

Ainsi, $f(x) = \cos(\omega x)$ est une solution de l'équation différentielle.

De même, en reprenant la même démarche, $g(x) = \sin(\omega x)$ est aussi une solution.

On admet alors que ce sont les seules solutions :

Théorème 7 (Admis)**.**

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)$, où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles quelconques.

- L'équation différentielle admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus **deux** conditions initiales données sur y et y'.
- Les solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$, où A et φ sont des constantes réelles, φ étant le déphasage.

2.2 Cas général

Définition 7.

Soient $a \neq 0$, b et c trois constantes réelles, d une fonction dérivable sur I et y la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants EDLO2** toute équation du type

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

Tout comme les équations différentielles d'ordre 1, nous allons travailler sur un exemple tout au long de cette partie.

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 8e^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Exemple

Dans cet exemple, on a : $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ et $d(x) = 4x^2e^x$.

2.3 Solution générale de l'équation homogène associée $(E_0) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

2.3.1 Combinaison linéaire de deux solutions indépendantes

Théorème 8 (Admis)**.**

Soient f et g deux solutions de l'équation (E_0) sur l'intervalle I, aucune n'étant le produit de l'autre par une **constante**. Alors l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y = Af + Bg.$$

Toute solution de l'équation (E_0) est une **combinaison linéaire** des solutions f et g.

Démonstration.

Ce théorème est admis, mais on peut facilement observer que si f et g sont deux solutions de l'équation (E_0) alors toute fonction de la forme $x = Af + Bg$ est aussi une solution de (E_0). En effet, sachant que $af'' + bf' + cf = 0$ et $ag'' + bg' + cg = 0$, alors

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy &= a(Af + Bg)'' + b(Af + Bg)' + c(Af + Bg) \\
&= a(Af'' + Bg'') + b(Af' + Bg') + c(Af + Bg) \\
&= aAf'' + aBg'' + bAf' + bBg' + cAf' + cBg \\
&= A(af'' + bf' + cf') + B(ag'' + bg' + cg) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.3.2 Équation caractéristique associée à une EDLO2

Comme les équations du premier degré, nous allons chercher une fonction exponentielle solution de (E_0). Supposons que la fonction $y : t \mapsto e^{rx}$ soit une telle solution. Alors, puisque $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$, r doit vérifier

$$\begin{aligned} ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \\ ar^2 + br + c &= 0 \end{aligned}$$

car $e^{rx} \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Définition 8 (Équation caractéristique)**.**

L'équation du second degré en r : $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle (E_0).

2.3.3 Solutions de l'équation différentielle (E_0)

Proposition 2.

La fonction $y : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution de (E_0) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique.

Les solutions de (E_0) dépendent donc de celles de l'équation caractéristique, et en particulier de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il faut donc étudier trois cas.

☞ Si $\Delta > 0$: L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Les fonctions $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1x}$ et $y_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2x}$ sont donc deux solutions de (E_0) et aucune n'est le produit de l'autre par une constante. Par conséquent l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions de la forme
$$y(x) = A\mathrm{e}^{r_1x} + B\mathrm{e}^{r_2x}.$$

☞ Si $\Delta = 0$: L'équation caractéristique a une unique solution réelle $r = -\frac{b}{2a}$. La fonction $y : x \mapsto e^{rx}$ est alors solution de (E_0). On peut prouver que dans ce cas la fonction $y : x \mapsto xe^{rx}$ est solution de (E_0). Par conséquent l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions de la forme
$$y(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{rx}.$$

☞ Si $\Delta < 0$: L'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. Les fonctions à valeur complexes $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$ sont donc deux solutions de (E_0). Mais nous cherchons deux fonctions réelles solutions de (E_0).

On peut remarquer que $\mathrm{e}^{r_1 x} = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$. On constate alors que $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ et $\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{r_1 x} - e^{r_2 x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Ces deux nouvelles fonctions sont bien des solutions de (E_0) d'après le théorème de combinaison linéaire étendu aux cœfficients complexes. Ce sont de plus des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on peut prouver qu'aucune n'est le produit de l'autre par une constante. Par conséquent l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + B\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

où $\alpha + i\beta$ est une solution complexe de l'équation caractéristique.

Théorème 9.

On considère l'équation différentielle sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ d'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$.

Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_0) en fonction du discriminant :

	Solutions de l'équation caractéristique	Solution générale de (E_0)
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine double réelle $r = -\dfrac{b}{2a}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x) = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$

Démonstration.

D'après ce qui précède et le théorème 8, ce théorème est bien établi.

Exemple

Dans notre exemple, on souhaite résoudre $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$.
  L'équation admet donc une solution double $r = 1$.
- Les solutions de (E_0) sont donc du type $y(x) = (Ax + B)e^x$.

Exemple

Résolution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' + \omega^2 y = 0$:

- L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + \omega^2 = 0$ de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$.
  Les solutions de cette équation sont $0 + i\omega$ et $0 - i\omega$.
- Les solutions de (E_0) sont du type $y(x) = e^{0\times x}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)] = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

On retrouve le résultat étudié précédemment !

Exemple

Résolution de l'équation différentielle $(E_0) : 2y'' - 5y' - 3y = 0$:

- L'équation caractéristique de (E_0) est $2r^2 - 5r - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 49 > 0$.
  Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $r_2 = 3$.
- Les solutions de (E_0) sont donc du type $y_0(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

2.4 Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition 9.

On appelle **solution particulière** de l'équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

Toute fonction y vérifiant cette équation. On notera y_P de telles solutions.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les « y » par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre

Exemple

Dans notre exemple, on nous demande de montrer que la fonction h est une solution particulière de (E).

- Calcul de la dérivée première :
  $h(x) = 4x^2e^x$ donc $h'(x) = 8xe^x + 4x^2e^x = (8x + 4x^2)e^x$.

- Calcul de la dérivée seconde :
  $h''(x) = (8+8x)e^x + (8x+4x^2)e^x = (8+16x+4x^2)e^x$.
- Remplacement dans l'équation homogène :
  $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = (8+16x+4x^2)e^x - 2(8x+4x^2)e^x + 4x^2e^x = 8e^x$ après développement.
- h est donc bien une solution particulière de (E).

2.5 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Proposition 3 (Principe de superposition)**.**

Soit $(E) : ay''(x) + by'(x) + ay(x) = b_1(x) + b_2(x)$ avec b_1, b_2 des fonctions continues sur un intervalle I.

Si y_1 est solution de $(E_1) : ay''(x) + by'(x) + ay(x) = b_1(x)$ et y_2 est solution de (E_2) : $ay''(x) + by'(x) + ay(x) = b_2(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de (E).

Théorème 10.

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ où y_0 est la solution de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de l'équation complète.

Exemple

Dans notre exemple, on a $y_0(x) = (Ax+B)e^x$ et $y_p(x) = h(x) = 4x^2e^x$.

Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = (Ax+B)e^x + 4x^2e^x = (4x^2+Ax+B)e^x$.

2.6 Unicité de la solution sous conditions initiales

Définition 10 (Probème de Cauchy)**.**

On appelle **problème de Cauchy (d'ordre 2)** la donnée d'une équation différentielle et d'une double condition initiale :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

où a, b et c sont des constantes,

d une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$,

x_0 est un point de I, y_0 et y'_0 sont deux éléments donnés de $\mathbb{R}$.

Théorème 11 (Admis).

Un problème de Cauchy d'ordre 2 admet une unique solution sur l'intervalle I où il est défini.

Exemple

Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

- Première condition initiale :
  $f(0) = -4 \iff (4 \times 0^2 + A \times 0 + B)e^0 = -4 \iff B = -4$.
- Calcul de la dérivée :
  $f'(x) = (8x + A)e^x + (4x^2 + Ax + B)e^x = (4x^2 + 8x + Ax + A + B)e^x$.
- Deuxième condition initiale :
  $f'(0) = -4 \iff (4 \times 0^2 + 8 \times 0 + A \times 0 + A + B)e^0 = -4 \iff A + B = -4 \iff A = 0$.
- Conclusion :
  $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$.

2.7 Recherche d'une solution particulière

Proposition 4.

Considérons $y'' + ay' + by = P(x)$ une EDLO2 à coefficients constants avec un second membre P, un polynôme de degré n. Alors :

- Si $b \neq 0$ une solution particulière est de la forme $Q(x)$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$;
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ une solution particulière est de la forme $Q(x)$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) + 1$;
- Si $b = 0$ et $a = 0$ une solution particulière est de la forme $Q(x)$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) + 2$;

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 4y' = 4x - 1$.

L'équation caractéristique de (E) est $X^2 - 4X = 0$ dont les solutions sont 0 et 4.

On a : $y_H(x) = ae^{0x} + be^{4x} = a + be^{4x}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre est $P(x) = 4x - 1$ et le coefficient de y dans l'équation différentielle est 0. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_P(x) = cx^2 + dx + f$ (où le degré du polynôme a été augmenté de 1 par rapport à celui qui compose P).

y_P est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_P(x) = 2cx + d$, $y''_P(x) = 2c$.

On réinjecte ces expressions dans l'équation différentielle et on identifie les coefficients, on obtient un système que l'on résout.

y_P est une solution de (E) ssi $-8c = 4$ et $2c - 4d = -1$ ssi $c = -\dfrac{1}{2}$ et $d = 0$.

Dans ce genre de cas, f peut prendre n'importe quelle valeur.

En particulier, $y_P(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ est une solution particulière de (E) et :

$$y(x) = a + b\mathrm{e}^{4x} - \frac{x^2}{2}$$

Proposition 5.

Considérons $y'' + ay' + by = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ une EDLO2 à coefficients constants avec comme second membre une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques :

- Si $a \neq 0$ une solution particulière est de la forme $C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$;
- Si $a = 0$ et $b = \omega^2$, autrement dit c'est une équation d'oscillateur harmonique, une solution particulière est de la forme $Cx\cos(\omega x) + Dx\sin(\omega x)$;

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' + 9y = 2\cos(3x) + 3\sin(3x)$.

L'équation caractéristique de (E) est $X^2 + 9 = 0$ dont les solutions sont $-3i$ et $3i$.

On a : $y_H(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre est $2\cos(3x) + 3\sin(3x)$, l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique et la pulsation du du second membre est a même que celle de l'équation. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_P(x) = Cx\cos(3x) + Dx\sin(3x)$.

y_P est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$y_P'(x) = (C + 3Dx)\cos(3x) + (D - 3Cx)\sin(3x)$,

$y_P''(x) = (6D - 9Cx)\cos(3x) + (-6C - 9Dx)\sin(3x)$.

On réinjecte ces expressions dans l'équation différentielle et on identifie les coefficients, on obtient un système que l'on résout.

y_P est une solution de (E) ssi $6D = 2$ et $-6C = 3$ ssi $D = \dfrac{1}{3}$ et $D = -\dfrac{1}{2}$.

En particulier, $y_P(x) = \dfrac{1}{3}x\cos(3x) - \dfrac{1}{2}x\sin(3x)$ est une solution particulière de (E) et :

$$y(x) = \left(A + \frac{1}{3}x\right)\cos(3x) + \left(B - \frac{1}{2}x\right)\sin(3x)$$

Proposition 6.

Dans une EDLO2 à coefficients constants avec second membre de la forme $d(x) = P(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ où P est un polynôme de degré n et $\gamma \in \mathbb{R}$, les solutions particulières sont de la forme :

- $Q(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$ si γ n'est pas racine du polynôme caractéristique ;
- $Q(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si γ est racine simple du polynôme caractéristique ;
- $Q(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ avec Q un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si γ est racine double du polynôme caractéristique.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^x$.

L'équation caractéristique de (E) est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2.

On a : $y_H(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre est $d(x) = x\mathrm{e}^x$ et 1 est solution simple de l'EC.

On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_P(x) = (cx^2 + dx)\mathrm{e}^x$ (le degré du polynôme a été augmenté de 1 par rapport à celui qui compose d).

y_P est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$y_P'(x) = \mathrm{e}^x(2cx + d + cx^2 + dx) = \mathrm{e}^x(cx^2 + (2c + d)x + d)$,

$y_P''(x) = e^x(cx^2 + (4c + d)x + 2c + 2d)$.

On réinjecte ces expressions dans l'équation différentielle et on identifie les coefficients, on obtient un système que l'on résout.

y est une solution de (E) ssi $-2c = 1$ et $2c - d = 0$ ssi $c = -\dfrac{1}{2}$ et $d = -1$.

En particulier, $y_P(x) = \left(-\dfrac{x^2}{2} - x\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E) et :

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x + a\right)\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x}$$