CHAPITRE

4 Développements Limités

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de développement limité de fonctions.
- Connaître les développements limités des fonctions usuelles en zéro.
- Déterminer le développement limité d'une fonction en zéro à partir des développements limités de fonctions usuelles en zéro
- Utiliser les développements limités dans l'étude de fonctions
- Utiliser les développements limités dans le calcul de limite, la détermination de tangentes, de position relative, d'asymptotes.

1 Fonction exponentielle

On cherche à approximer la fonction $x \to \exp(x)$ par des fonctions polynômes successivement du premier, deuxième et troisième degré.
On pose $f(x) = e^x$, fonction dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$.

1.1 Développement limité d'ordre 1

Propriété 1.

Au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

En effet, la définition du nombre dérivé de la fonction f en 0 nous donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Or, on a : $\begin{cases} f(x) = e^x & \text{donc} \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \text{donc} \quad f'(0) = 1 \end{cases}$ D'où le résultat trouvé dans la propriété.

1.2 Développement limité d'ordre 2

Propriété 2.

Au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On peut démontrer cette propriété grâce, entre autre, à des intégrations successives :

— La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in [-1\ ;\ 1\ ],\quad e^{-1} \leq e^t \leq e^1$$

— On intègre cette double inégalité de 0 à x pour $x \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^x \frac{1}{e}\ dt \leq \int_0^x e^t\ dt \leq \int_0^x e\ dt$$

$$\left[\frac{t}{e}\right]_0^x \leq [e^t]_0^x \leq [et]_0^x$$

$$\frac{x}{e} \leq e^x - 1 \leq ex$$

— On intègre à nouveau cette double inégalité de 0 à t pour $t \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^t \frac{x}{e}\ dx \leq \int_0^t (e^x - 1)\ dx \leq \int_0^t ex\ dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^t \leq [e^x - x]_0^t \leq \left[\frac{ex^2}{2}\right]_0^t$$

$$\frac{t^2}{2e} \leq e^t - t - 1 \leq \frac{et^2}{2}$$

— On intègre une dernière fois cette double inégalité de 0 à x pour $x \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^x \frac{t^2}{2e}\ dt \leq \int_0^x (e^t - t - 1)\ dt \leq \int_0^x \frac{et^2}{2}\ dt$$

$$\left[\frac{t^3}{6e}\right]_0^x \leq \left[e^t - \frac{t^2}{2} - t\right]_0^x \leq \left[\frac{et^3}{6}\right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{6e} \leq e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \leq \frac{ex^3}{6}$$

— Pour $x \neq 0$, on pose $\epsilon(x) = \dfrac{e^x - \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right)}{x^2}$. D'après l'inégalité précédente, x^2 étant positif, on obtient :

$$\frac{x}{6\,e} \leq \epsilon(x) \leq \frac{ex}{6}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{6e} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ex}{6e} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

— D'où la conclusion :

$$\forall x \in [-1\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ 1\ ],\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \ \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1.3 Développement limité d'ordre 3

Propriété 3.

Au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

— On intègre de nouveau la dernière inégalité trouvée précédemment de 0 à t pour $t \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^t \frac{x^3}{6e}\,dx \leq \int_0^t \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right)dx \leq \int_0^t \frac{ex^3}{6}\,dx$$

$$\left[\frac{x^4}{24e}\right]_0^t \leq \left[e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^t \leq \left[\frac{ex^4}{24}\right]_0^t$$

$$\frac{t^4}{24e} \leq e^t - \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - t - 1 \leq \frac{et^4}{24}$$

— Pour $t \neq 0$, on pose $\varepsilon(t) = \dfrac{e^t - \left(\dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} + t + 1\right)}{t^3}$.

D'après l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{t}{24e} \leq \varepsilon(t) \leq \frac{et}{24} \quad \text{pour} \quad t > 0$$

$$\frac{et}{24} \leq \varepsilon(t) \leq \frac{t}{24e} \quad \text{pour} \quad t < 0$$

Or, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{24e} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{et}{24} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

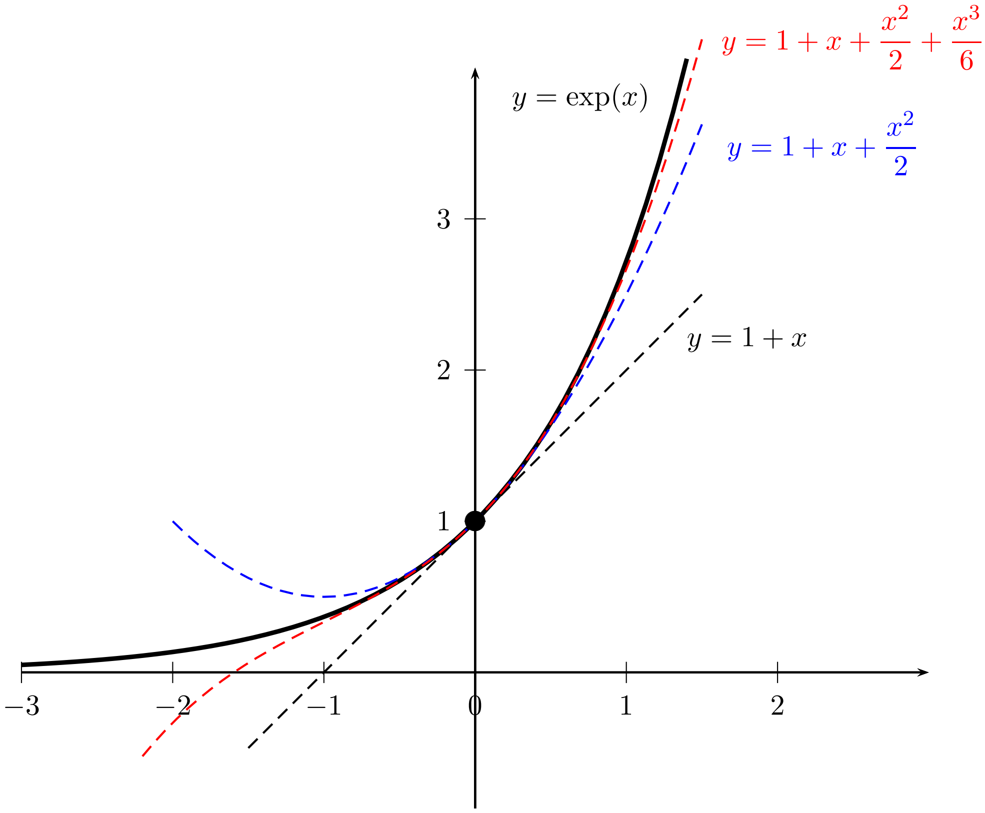
— D'où la conclusion :

$$\forall t \in [-1\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ 1\ ], e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{où} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

1.4 Interprétation graphique

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !



2 Développements limités

2.1 Formule de Taylor

Théorème 1 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et admettant sur I des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n+1$. Alors pour tout x de I, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

ou, en utilisant le symbole $\sum$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Démonstration.

Démonstration pour $n = 2$.

On a $\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

On intègre par partie $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$ en posant : $\begin{cases} \mathrm{d}v = \mathrm{d}t & u = f'(t) \\ v = t - x & \mathrm{d}u = f''(t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\,dt &= [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt \\ &= -(a-x)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt \end{aligned}$$

donc $f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$.

On intègre par partie $\displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$ en posant : $\begin{cases} \mathrm{d}v = (x-t)\,dt & u = f''(t) \\ v = -\dfrac{(x-t)^2}{2} & \mathrm{d}u = f'''(t) \end{cases}$

$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \left[-\dfrac{(x-t)^2}{2}f''(t)\right] - \displaystyle\int_a^x -\dfrac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt$ d'où

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t).$$

Par récurrence, on démontre que la formule est vraie pour tout n.

Remarque

On peut majorer le terme $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$ *et montrer qu'il est inférieur à une certaine quantité.*

2.2 Développements limités en 0

2.2.1 Généralités

Définition 1.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de** 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

On dit que $P_n(x)$ est la **partie régulière** du développement limité et $x^n\varepsilon(x)$ est le **reste**.

Remarque

On note $DL_n(0)$ pour développement limité à l'ordre n au voisinage de 0

Proposition 1 (Unicité)**.**

Si f admet un $DL_n(0)$, alors il existe un **unique** polynôme tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \text{au voisinage de } 0,\ f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

La partie régulière d'un développement limité est **unique**.

Proposition 2.

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P, alors, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, f admet un $DL_k(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant P au degré k.

Proposition 3.

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de 0 si et seulement si elle est continue en 0.

Démonstration.

Cela découle des définitions de continuité et développement limité.
En effet si f est continue en 0 si et seulement si $f(x) - f(0) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
On note $\varepsilon(x) = f(x) - f(0)$, ainsi $f(x) = f(0) + \varepsilon(x)$ qui est donc le développement limité de f en 0 à l'ordre 0.

Proposition 4.

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.

Démonstration.

Exercice : exprimer la définition de la dérivée de f en 0 comme quotient dont on sait que la limite est $f'(0)$, puis utiliser la même méthode que pour la continuité.

⚠ `Le lien entre développement limité et régularité d'une fonction s'arrête là (à l'ordre 1)`

2.2.2 Développements limités usuels en 0

Au voisinage de zéro, on a :

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n\varepsilon(x).$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n\varepsilon(x).$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$

Remarque

La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (respectivement impaire) est un polynôme constitué de monômes de degré pair (respectivement impair).

Dans le reste du chapitre, on considère les fonctions f et g admettant à l'ordre n au point 0 des développements limités de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$.

2.3 Développements limités en a

Dans cette partie, a désigne un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a. On appelle g la fonction définie au voisinage de 0 par $g(h) = f(a+h)$.

Définition 2.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a si la fonction g possède un $DL_n(0)$ c'est à dire que : $g(h) = a_0 + a_1h^1 + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$.

Ainsi, en posant $x = a + h$ ce qui revient à $x - a = h$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a) \\ &= P_n(x-a) + (x-a)^n\epsilon(x-a) \text{ où } \lim_{x\to a}\varepsilon(x-a) = 0. \end{aligned}$$

$P_n(x-a)$ est la **partie régulière** du développement limité au voisinage de a.

Exemple

Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

Si, pour $x \in \ R^*$, on pose $x = 2 + h$, on a : $f(2 + h) = e^{2+h} = e^2 e^h$.

On a vu que $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + h^3\varepsilon(h)$ au voisinage de 0.

Ainsi $f(2 + h) = e^2(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + h^3\varepsilon(h))$

En posant $x = 2 + h$ on a $h = x - 2$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= e^2(1 + (x-2) + \tfrac{(x-2)^2}{2!} + \tfrac{(x-2)^3}{3!} + (x-2)^3\epsilon((x-2)) \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \tfrac{e^2(x-2)^2}{2!} + \tfrac{e^2(x-2)^3}{3!} + (x-2)^3\epsilon((x-2)) \end{aligned}$$

2.4 Développement limités de somme et produit de fonctions

Propriété 4.

Soient les fonctions f et g admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$.

- $f + g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P(x) + Q(x)$.
- $f \times g$ admet $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P(x) \times Q(x)$ en supprimant tous les termes de degré strictement supérieurs à n.

Démonstration.

- On note P et Q les $DL_n(0)$ des fonctions f et g respectivement alors $deg(P) = n$ et $deg(Q) = n$ et $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$.
  Ainsi $f(x)+g(x) = P(x)+Q(x)+x^n(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x))$. Si on note $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$ alors par propriété des limites $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$. De plus $deg(P + Q) \leq n$ ainsi on vérifie la définition de développement limité pour $(f + g)(x)$ en 0 à l'ordre n.
- La démonstration est du même ordre. Pour ce qui est du polynôme qui représente le développement limité, il faut tronquer le produit au degré n souhaité. La fonction $\varepsilon(x)$ est du coup un peu plus compliquée mais il faut juste vérifier qu'elle tend vers 0 lorsque x tend vers 0 ce qui se fait par propriété des limites et continuité des polynômes.

Exemple

Développement limité à l'ordre 3 de $\dfrac{e^x}{1+x}$:

- A l'ordre 3, on a $\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}$
- donc $\dfrac{e^x}{1+x} = e^x \times \dfrac{1}{1+x} = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x))$

$$\begin{aligned} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\mapsto 0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

2.5 Composition

Propriété 5.

On considère la fonction f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x)$ alors :

- $f(ax) = P(ax) + x^n\epsilon_1(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.
- $f(x^p) = P(x^p) + x^{n\times p}\epsilon_2(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- Si $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ alors $f(ax) = P(ax) + (ax)^n + \varepsilon(ax)$.

  Mais a étant fixé si x tend vers 0, ax tend aussi vers 0. Il en sera donc de même pour $a^n\varepsilon(ax)$ que l'on note $\varepsilon_1(x)$.

  Ainsi $f(ax) = P(ax) + x^n\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x)$ qui tend vers 0 lors que x tend vers 0, $P(ax)$ est le $DL_n(0)$ de $f(ax)$.

- De même ici où il faut tronquer le polynôme $P(x^p)$ au degré n souhaité et construire la fonction $\varepsilon_2(x)$ en vérifiant ses propriétés.

Exemple

Développement limité à l'ordre 7 de $\sin(2x)$:

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + x^7\epsilon_1(x)$ donc :

  $\sin(2x) = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} - \dfrac{(2x)^7}{7!} + x^7\epsilon_2(x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5 - \dfrac{8}{315}x^7 + x^7\epsilon_2(x).$

Développement limité à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon_1(x)$ donc : $\quad \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\epsilon_2(x).$

Proposition 5.

Si les fonctions f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$ et si $f(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme composé $Q \circ P$.

Exemple

Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = e^x$, on cherche le $DL_3(0)$ de $g \circ f(x) = e^{sin(x)}$.

- On vérifie que $\sin(0) = 0$.
- On écrit les $DL_3(0)$ de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$.
- On compose les $DL_2(0)$, dans le bon sens, et on tronque au degré 3 les polynômes obtenus :

$$\begin{aligned} e^{sin(x)} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)\right) + \tfrac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)\right)^3 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

2.6 Développement limité d'un quotient

Proposition 6.

Soit u une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$. Si u admet un $DL_n(0)$ alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, la fonction est bien définie au voisinage de 0. On utilise le théorème de composition précédent et le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$ pour conclure et avoir l'expression du développement limité :

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u^2(x) + u^3(x) + u^4(x) + u^5(x) + \cdots + u^n(x) + u^n(x)\varepsilon(u(x))$$

On développe et on tronque de manière à obtenir l'expression qui nous intéresse.

Proposition 7.

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ admettant un $DL_n(0)$. Si g ne s'annule pas au voisinage de 0 et si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = l \neq 0$, on pose $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{l-(l-g(x))} = \dfrac{f(x)}{l}\dfrac{1}{1-\left(1-\frac{g(x)}{l}\right)}$.

La fonction $u : x \longmapsto l - \dfrac{g(x)}{l}$ admet un $DL_n(0)$ et est de limite nulle, on peut utiliser la proposition précédente pour avoir un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-u(x)}$ et faire le produit des $DL_n(0)$ obtenus.

Exemple

Faire le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+e^x) = 2$
- $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\left(\frac{1-e^x}{2}\right)}$
- On a les développements limités :
$\dfrac{e^x-1}{2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + x^3\epsilon(x)$ et $\dfrac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u^2(x) + u^3(x) + u^3(x)\epsilon(x)$

➔ $2f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + x^3\epsilon(x)\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + x^2\epsilon(x)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + x\epsilon(x)\right)^3 + x^3\epsilon(x)$

$2f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^3 + x^3\epsilon(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + x^3\epsilon(x)$

➔ Finalement $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{48}x^3 + x^3\epsilon(x)$

2.7 Développements limités au voisinage de l'infini

Dans cette partie, f est une fonction définie au voisinage de l'infini. On appelle g la fonction définie au voisinage de 0 par $g(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$.

Définition 3.

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction g possède un $DL_n(0)$. On a alors : $g(h) = a_0 + a_1h^1 + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$.
Ainsi, en posant $x = \dfrac{1}{h}$ ce qui revient à $\dfrac{1}{x} = h$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{où } \lim_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0. \end{aligned}$$

$P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est la **partie régulière** du développement limité au voisinage de l'infini.

Exemple

Donner la DL_2 au voisinage de l'infini de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Si pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $u = \dfrac{1}{x}$, on a : $f(x) = \dfrac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - 1} = \dfrac{1}{1-u}$ Le $DL_n(0)$ à l'ordre 2 de $u \longmapsto \dfrac{1}{1-u}$ est : $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u^2)$

En revant à x, nous donne : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2.8 Dérivation et intégration

Propriété 6.

Si f est dérivable sur un intervalle I contenant 0, de dérivée continue et si f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, alors on peut obtenir ce $DL_n(0)$ en dérivant celui de f à l'ordre n.

Exemple

Le développement limité à l'ordre 7 de $\sin(x)$ est : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + x^7\varepsilon(x)$.

- Par dérivation, on trouve $(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x)$.
- On retrouve bien le développement limité à l'ordre 6 de $\cos(x)$.

Propriété 7.

Soit F une primitive de f sur un intervalle I contenant 0,

Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$,

alors $F(x) = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$.

Exemple

Le développement limité à l'ordre n de $\frac{1}{1+x}$ est :

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^nx^n + x^n\varepsilon(x)$.
- Si on intègre, on obtient $\int \frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$
- On retrouve ainsi le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction $\ln(1+x)$.

3 Étude locale de fonctions

3.1 Recherche de limite

L'usage des développements limités est pratique pour lever des formes indéterminées de limites.

Exemple

On recherche la limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$.

On constate que $\lim\limits_{x\to 0} (x(e^x+1) - 2(e^x-1)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, on a donc bien une FI du type $\frac{0}{0}$.

Pour lever l'indétermination, nous allons utiliser les développements limités. Le dénominateuer étant x^3, il nous faut au moins faire un $DL_3(0)$ des fonctions au numérateur.

- $x(e^x+1) = x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) + 1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$
- $2(e^x-1) = 2(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) - 1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x)$

$$\begin{aligned} \text{Finalement } x(e^x+1) - 2(e^x-1) &= 2x + x^2 + \tfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x) - \left(2x + x^2 + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x)\right) \\ &= 2x + x^2 + \tfrac{x^3}{2} - 2x - x^2 - \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_4(x) = \tfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x) \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{6} + \varepsilon_4(x) = \tfrac{1}{6}$$

3.2 Étude de tangentes

L'existence d'une tangente non verticale au point d'abscisse x_0 du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en x_0, c'est à dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Dans ce cas l'étude du signe de $f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$ permet de préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :$f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Au point d'abscisse 0, le graphe est donc tangent à la droite d'équation : $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x$ et, au voisinage de 0, la quantité : $\dfrac{1}{1+e^x} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x\right)$ est égale à $\dfrac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Elle est donc positive à droite et négative à gauche. Le graphe traverse donc la tangente.

Méthode.

Si en x_0, on dispose d'un développement limité :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \varepsilon(x) \text{ avec } a_2 \neq 0$$

alors la tangente en x_0 est la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et au voisinage de x_0 la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de a_2.

En effet $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + \varepsilon(x)$.

Plus généralement si en x_0, on dispose d'un $DL_p(x_0)$ alors :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \varepsilon(x)$$

La tangente en x_0 est la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et au voisinage de x_0 la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

En effet $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_p(x - x_0)^p + \varepsilon(x)$.

3.3 Recherche d'asymptotes

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} |f| = +\infty$.

L'existence d'une asymptote au graphe de f est équivalente à l'existence de constantes a_0 et a_1 ainsi que d'une fonction ε tendant vers 0 en l'infini et vérifiant : $f(x) = a_0 + a_1x + \varepsilon(x)$.

Dans ce cas l'étude du signe de $f(x) - (a_0 + a_1x)$ permet de positionner la courbe par rapport à son asymptote.

Méthode.

Lorsqu'il existe des réels a_0, a_1 et a_2 tels que $a_2 \neq 0$ et au voisinage de l'infini : $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{x} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est asymptote au graphe et au voisinage de l'infini, la position de la courbe par rapport à son asymptote est alors donnée par le signe de $\frac{a_2}{x}$.
Plus généralement, s'il existe un entier $p \geq 1$ et des réels a_0, a_1 et a_{p+1} tels que $a_{p+1} \neq 0$ et au voisinage de l'infini : $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_{p+1}}{x^p} + \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)$.
Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est asymptote au graphe et au voisinage de l'infini, la position de la courbe par rapport à son asymptote est alors donnée par le signe de $\frac{a_{p+1}}{x^p}$.

Exemple

Étude à l'infini de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash]0;1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

On pose $u = \frac{1}{x}$, on a :

$g(u) = \sqrt{\frac{\frac{1}{u^3}}{\frac{1}{u} - 1}} = \sqrt{\frac{u}{u^3(1-u)}} = \frac{1}{|u|}\sqrt{\frac{1}{1-u}}$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u^2)$

On a en 0^+ $g(u) = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u^2)\right) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}u + u\varepsilon(u)$

En revenant à x au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

De même au voisinage de $-\infty$, on a : $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Les droites d'équations $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$ sont donc asymptotes au graphe, et l'on a, au voisinage de l'infini, les positions par rapport à ces asymptotes.