CHAPITRE 6 — Dérivation et applications

Dès la seconde moitié du XVIIe siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales.

C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVIIe siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes » ; le marquis de l'Hospital participera aussi à la fin du XVIIe à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particuliéres (cf. Règle de L'Hôpital). Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au XVIIIe siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui cette fois-ci pose problème : $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit formellement (voir à ce sujet l'article sur les nombres réels et l'article détaillé sur leur construction) et c'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIXe siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

C'est au passage à Lagrange (fin du XVIIIe siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x.

Source : https://www.techno-science.net/definition/6280.html

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de taux de variation et nombre dérivé
- Justifier qu'une fonction est dérivable
- Calculer la dérivée d'une fonction type
- Utiliser la dérivée (variation de fonction, extrema, calcul de limites...)
- Aborder et utiliser la notion de convexité
- Déterminer des points d'inflexion

1 Dérivée en un point

1.1 Nombre dérivé

Définition 1.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I, $x, y \in I$.

On appelle **taux de variations** de la courbe représentative de f entre les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ le nombre $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Remarque

— *On dit aussi entre les points d'abscisses x et y, sous entendu que le point d'abscisse x appartenant à la représentation graphique de f a pour ordonnée $f(x)$ (idem pour y).*

— *Le taux de variation correspond à la pente de la droite reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.*

Définition 2.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I.

On dit que f est **dérivable** en un point a de I si le taux de variation en a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une **limite finie** quand h tend vers 0.

Cette limite est appelée **nombre dérivé** en a et notée $f'(a)$.

La notation $f'(x)$ est due au mathématicien Français Lagrange (1736-1813). Les physiciens privilégient la notation de Leibniz : $\frac{dy}{dx}$.

Remarque

On a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Définition 3.

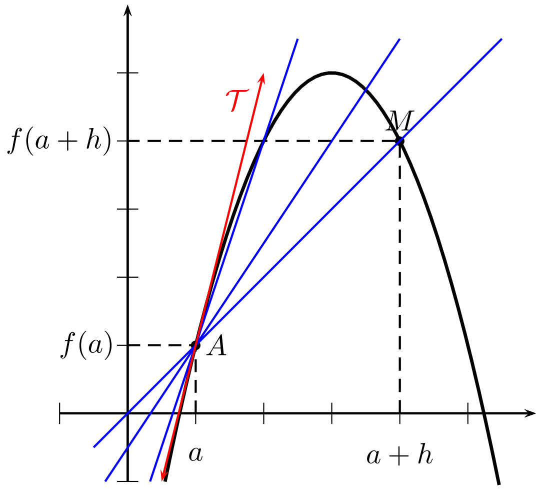
Soit I un intervalle, $a \in I$, f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. **La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point** A est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

En physique, la vitesse $v(t)$ en un point de date t est le nombre dérivé de la fonction $x = f(t)$. On note $v(t) = f'(t) = \frac{dx}{dt}$.

Interprétation graphique :

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A. Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.



Proposition 1.

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A(a; f(a)) \in \mathcal{C}_f$.
La tangente $\mathcal{T}$ en A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Proposition 2.

Soit f un fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a et admet une tangente verticale.

Exemple

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en $a = 1$ de nombre dérivée $f'(1) = 2$, la courbe représentative de f admet au point A de coordonnées $(1; 1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.
- Au contraire, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $(0; 0)$.

1.2 Approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Au voisinage de a, la tangente en a ressemble beaucoup à la courbe $\mathcal{C}_f$. On dit que la tangente est une approximation affine de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse a.

Proposition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. Alors, pour h proche de 0, on a :

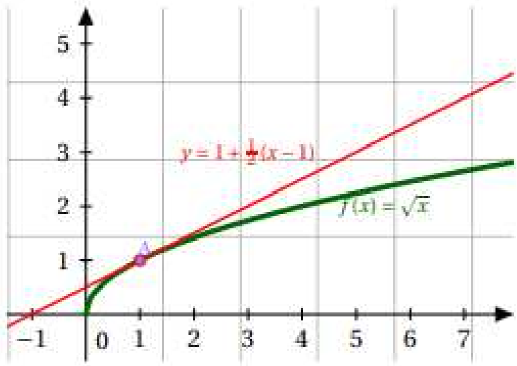
$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Exemple

Calculer $\sqrt{1,02}$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$. Donc : $\sqrt{1,02} = f(1,02) \simeq 1 + \frac{1}{2}(1,02 - 1) = 1,01$.

Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{1,02} = 1,0995$.



1.3 Dérivabilité et continuité

Propriété 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. Si f est dérivable en a (sur I) alors f est continue en a (sur I).

Remarque

La réciproque est fausse. On pourra considérer la fonction valeur absolue en 0.

Démonstration.

Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Puisque $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a)$, par propriété sur les limites on en déduit alors $f(a+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a)$, et donc f est continue en a.

1.4 Nombre dérivé à gauche et à droite

Définition 4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction f est dite dérivable à droite en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a^+.

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé à droite de f en a, et est notée $f'_d(a)$:

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De même, f est dite dérivable à gauche en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a^-.

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de f en a, et est notée $f'_g(a)$:

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Proposition 4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors, la fonction f est dérivable en a, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a **ET** $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple

Étude de la dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in]0;1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

- Pour $a \in]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$, la fonction est polynomiale donc dérivable (voir ci-après).

  On a : $f'(a) = \begin{cases} 2a \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

- Étude de la dérivabilité en 0.

  On a $f'_g(0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ et $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- Étude de la dérivabilité en 1.

  On a $f'_g(1) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ et $f'_d(1) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$ donc f n'est pas dérivable en 0 mais elle admet deux (demi) tangentes à gauche et à droite au point d'abscisse 1.

- Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Remarque

Les nombres dérivés à gauche et à droite $f'_d(a)$ ou $f'_g(a)$ sont les coefficients directeurs de demi droites tangentes à gauche et à droite au point d'abscisse a. On parle de demi tangente.

2 Fonction dérivée

Définition 5.

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout réel a de I.

Si f est dérivable sur I, on appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction définie sur I par $f' : x \to f'(x)$.

2.0.1 Tableaux des dérivées de fonctions usuelles

Pour obtenir les formules des dérivées, on utilise la définition du nombre dérivé :

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$
- donc, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

En prenant $\omega = 1$ et $\varphi = 0$, on retrouve les formules précédentes.

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Exemple

- si $f(x) = \pi$, alors $f'(x) = 0$;
- si $f(x) = x^{2022}$, alors $f'(x) = 2021\,x^{2022}$;
- si $f(t) = \cos(2t - 3)$, alors $f'(x) = -2\sin(2t - 3)$.

2.1 Somme de deux fonctions, produit d'une fonction par un réel

Proposition 5.

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Proposition 6.

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un nombre réel et u une fonction dérivable sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \lambda u'(x)$$

Démonstration.

Les démonstrations des deux dernières propositions sont des applications des propriétés des limites.

Exemple

➔ $f(x) = x^3 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Formule : $(u + v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$.

On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.

- $f(x) = 3(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$.

  Formule : $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$.

  On obtient $f'(x) = 6x$.

- $f(x) = x^7 + \cos(4x)$ sur $\mathbb{R}$ alors $u(x) = x^7$ et $v(x) = \cos(4x)$.

  On a donc $u'(x) = 7x^6$ et $v'(x) = -4\sin(4x)$ ainsi $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 7x^6 - 4\sin(4x)$

- $g(x) = \dfrac{-17,35}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ alors $\lambda = -17,35$ et $u(x) = \dfrac{1}{x}$.

  On a $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et finalement $f'(x) = -17,35 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{17,35}{x^2}$

2.2 Produit, inverse d'une fonction, quotient de deux fonctions

Proposition 7.

Si $f(x) = u(x)v(x)$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ alors la fonction f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Démonstration.

Soit $f(x) = u(x)v(x)$ alors $f(x+h) = u(x+h)v(x+h)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f(x+h) - f(x) &= u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) \\ &= u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x) \\ &= (u(x+h - u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h) - v(x)) \end{aligned}$$

En prenant $u = 1$, on retrouve la formule précédente.

Par propriété des limites et continuité, le rapport
$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{u(x+h) - u(x))}{h} v(x+h) + u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}$
tend, lorsque h tend vers 0, vers $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

$$\frac{u(x+h) - u(x))}{h} v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Exemple

- $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$ définie sur $\mathbb{R}$.

  Formule : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$.

  On obtient $f'(x) = -20x + 21$.

Proposition 8.

- Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

- Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ et si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Démonstration.

On utilise l'identité $f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{u(x+h)u(x)}$, les propriétés des limites et la continuité de u pour établir la première formule. Puis par produit on établit la seconde.

Définition 6.

On appelle fonctions rationnelles les fonctions de la forme $x \to \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions polynômes.

Une fonction rationnelle est définie pour tout x tel que $v(x) \neq 0$

Propriété 2.

Une fonction rationnelle est dérivable, donc continue, sur son ensemble de définition.

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

  Formule : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x+1$.

  On obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.

- $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

  Formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x-4$ et $v(x) = x^2+3$.

  On obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

2.3 Composée de deux fonctions

Proposition 9.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un ensemble inclus dans un intervalle J. Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle J. Dans ces conditions, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$
Soit

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = f'(x) \times (g'(f(x)))$$

Démonstration.

Soit x_0 un réel de l'intervalle de I. On veut montrer que $g \circ f$ est dérivable en x_0 donc que $\dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$$

f étant dérivable en x_0, on sait que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ quand x tend vers x_0.
De plus lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ car f est continue en x_0 (car dérivable sur I). De plus, comme g est dérivable en $f(x_0)$, $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$ tend vers $g'(f(x)) = (g' \circ f)(x_0)$.
Donc $\dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$ tend vers $f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0)$ pour tout x_0 de I.

2.3.1 Fonction $x \to u^n(x)$

On considère un entier relatif n non nul, une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = (u(x))^n$.

Propriété 3.

- Si $n > 0$, alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.
- Si $n < 0$ et si pour tout x de I, $u(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

Exemple

- $f(x) = (2x - 7)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.

Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = 2x - 7$ et $n = 4$.

On obtient $f'(x) = 8(2x - 7)^3$.

➜ $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = x^2+1$ non nul et $n = -3$.
On obtient $f'(x) = -6x \times (x^2+1)^{-4} = -\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$.

2.3.2 Fonctions $x \to \ln(u(x))$ et $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriété 4.

- La fonction $f : x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- La fonction $f : x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple

➜ $f(x) = \ln(-2x+6)$ définie sur $]-\infty\,;3\,[$.
Formule : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x+6$.
On obtient $f'(x) = -\dfrac{-2}{-2x+6}$.

➜ $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Formule : $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 3x+1$.
On obtient $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x+1}$.

Remarque

De manière générale, soit u et f des fonctions dérivables, la dérivée d'une fonction du type $x \to f(u(x))$ est $x \to f'(u(x)) \times u'(x)$.

2.3.3 Tableau des dérivées de composées usuelles

Soit u une fonction dérivable.

Forme de la fonction	Forme de la dérivée	Conditions
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{u^n(x)}$	$-n\dfrac{u'(x)}{u^{n+1}(x)}$	$n \in \mathbb{N}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$	
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$

2.3.4 Théorème de l'application réciproque

Théorème 1.

Soit f une application continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Corollaire 1.

Si f une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Exemple

Si n est un entier naturel strictement positif, la fonction : $f_n : x \longmapsto x^n$ est strictment croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Elle possède donc une fonction réciproque, notée $g_n : y \longmapsto \sqrt[n]{y}$, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$g_n'(y) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$$

Remarque

Ce théorème justifiera la continuité, la dérivabilité, les formules de dérivées de la plupart des fonctions réciproques que nous recontrerons.

3 Dérivées successives

Définition 7.

Soit f une fonction définie et dérivable sur I un intervalle.

On dit que f est deux fois dérivable sur I si la f' est dérivable en tout point de I. Sa dérivée est appelée fonction dérivée seconde de f ; elle est notée f''.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

- La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
- La fonction f' est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = 6x - 6$.

Remarque

Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, alors $f''(t)$, s'il existe, représente l'accélaration du point à l'instant.

Définition 8.

On considère $n \in \mathbb{N}$. Étant donné une fonction f de I dans $\mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} = f$ et l'on définit par récurrence la fonction dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$ si elle existe.

`La notation` $f^{(n)}$ `n'a rien à voir avec la notation de puissance!`

Remarque

L'existence de $f^{(n)}$ sur I entraîne l'existence et la continuité sur I de toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

On peut montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x-1)^{(n+1)}}$$

Proposition 10.

Étant donné deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur I ainsi que deux réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I.

Démonstration.

Par récurrence sur n en utilisant le fait que si f et g sont dérivables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et $(\lambda f + \mu g) = \lambda f' + \mu g'$

Exemple

Soit $f(x) = 4\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)$ alors la dérivée de $\cos(x)$ étant $-\sin(x)$ et celle de $\sin(x)$ étant $\cos(x)$ on obtient : $f'(x) = -4\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)$

Proposition 11.

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors fg est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration.

Exercice.

Démonstration par récurrence sur n en utilisant la linéarité de la dérivation, une réindexation des sommes et la formule d'addition des coefficients binomiaux.

Exemple

Soit $f(x) = \cos(x)\sin(x)$. Calculons $f^{(4)}(x)$.

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cos^{(k)}(x)\sin^{(4-k)}(x) \\
&= \binom{4}{0}\cos^{(0)}(x)\sin^{(4)}(x) + \binom{4}{1}\cos^{(1)}(x)\sin^{(3)}(x) + \binom{4}{2}\cos^{(2)}(x)\sin^{(2)}(x) \\
&\quad + \binom{4}{3}\cos^{(3)}(x)\sin^{(1)}(x) + \binom{4}{4}\cos^{(4)}(x)\sin^{(0)}(x) \\
&= \cos(x)\sin(x) + 4(-\sin(x))(-\cos(x)) + 6(-\cos(x))(-\sin(x)) + 4\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= \cos(x)\sin(x) + 4\cos(x)\sin(x) + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= 16\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Proposition 12.

Soit deux intervalles I et J, ainsi que deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 9.

On considère $n \in \mathbb{N}$. Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'elle est indéfiniment dérivable ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Remarque

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable sur I dont la dérivée est continue. On dit aussi continûment dérivable.

Exemple

- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée d'ordre n de f étant donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
- La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
- Les fonctions exponentielle, cosinus, sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (démonstration par récurrence)
- La fonction $f : x \longmapsto |x|$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ car continue mais non dérivable en 0

Proposition 13.

Étant donné deux fonctions f et g définies et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ainsi que deux réels λ et μ, alors :

- La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Proposition 14.

Étant donné deux intervalles I et J, ainsi que deux fonctions f et g définies et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration.

Par récurrence

5 Applications de la dérivation

5.1 Calcul de limites particulières

Proposition 15.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Démonstration.

Tout d'abord remarquons que la limite demandée ne peut pas se calculer directement car c'est une FI.

Considèrons donc $f(x) = \sin(x)$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ notamment en 0.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Or $\sin(0) = 0$, $f'(x) = \cos(x)$ et $f'(0) = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$

Proposition 16.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration.

Exercices

5.2 Théorème des accroissements finis

Définition 10.

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors

- f est une fonction croissante si pour tout $a < b$ on a $f(a) < f(b)$.
- f est une fonction décroissante si pour tout $a > b$ on a $f(a) < f(b)$.

Définition 11.

Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

- On dit que f **admet un maximum local en** a si et seulement si il existe un intervalle J avec $a \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(a)$
- On dit que f **admet un minimum local en** a si et seulement si il existe un intervalle J avec $a \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(a)$
- On dit que f **admet un extremum local en** a si et seulement si f admet un minimum ou un maximum local en a.

Théorème 2.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

- a n'est pas une extrémité de I
- f est dérivable en a
- f admet un extremum local en a

Alors $f'(a) = 0$

⚠ La réciproque n'est pas vraie, examiner la fonction $f : x \longmapsto x^3$

Proposition 17.

Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Si pour $x < a$, f est une fonction croissante et pour $x > a$, f est une fonction décroissante alors a est un maximum local.

Remarque

On peut adapter la proposition précédente à un minimum local.

Théorème 3 (Théorème de Rolle)**.**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si

- f est continue sur $[a; b]$
- f est dérivable sur $]a; b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration.

Lemme (admis) : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Puisque f est continue sur $[a;b]$, elle est bornée et possède donc un maximum M et un minimum m.

Si f est constante alors $m = M$ et pour tout $c \in]a,b[$ $f'(c) = 0$.

Supposons $m < M$, comme $f(a) = f(b)$, on ne peut pas avoir simultanément $m = f(a)$ et $M = f(a)$. Choisissons donc, par exemple, $M \neq f(a)$.

Puisque f atteint ses bornes, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = M$ ainsi

☞ Si $h > 0$, alors $\begin{cases} c+h > c \\ f(c+h) \leq M = f(c) \end{cases}$ donc $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

☞ Si $h < 0$, alors $\begin{cases} c+h < c \\ f(c+h) \leq M = f(c) \end{cases}$ donc $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

Comme f est dérivable en c, on en déduit, en faisant tendre h vers 0 : $f'(c) \leq 0$ et $f'(c) \geq 0$, d'où finalement $f'(c) = 0$.

Remarque

- *Le théorème de Rolle s'interprète graphiquement par l'existence d'un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, d'abscisse dans $]a;b[$, en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.*
- *Il peut ne pas y avoir d'unicité de l'élément noté c.*

Théorème 4 (Théorème des accroissements finis)**.**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a;b]$ et si f est dérivable sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Démonstration.

Considérons $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : Pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

Il est clair que φ est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (à vérifier).

En appliquant le théorème de Rolle à φ, sur $[a;b]$, on obtient l'existence d'un élément c de $]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est à dire tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque

L'interprétation graphique du TAF est la suivante : il existe un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, d'abscisse dans $]a : b[$, en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

5.3 Étude des variations d'une fonction

Propriété 5.

On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration.

C'est l'application du théorème des accroissements finis à chaque situation particulière.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction et ses extrema à partir de sa dérivée.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$;
- on détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines, on trouve -1 et 2 ;
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 ;
- on détermine le signe de la dérivée et on en déduit les variations de la fonction f :

Pour cela, on calcule le discriminant, qui vaut 9

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			6				$+\infty$
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-21		

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

Méthode (Étude des variations d'une fonction dérivable).

1. D'abord on s'assure que la fonction est bien définie puis continue et dérivable.
2. Calculer la dérivée de la fonction
3. Étudier le signe de la dérivée de la fonction
4. Mettre en parallèle changement de signe et variations de la fonction
5. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction
6. Déterminer les asymptotes et leurs équations (si possible)

5.4 Convexité

Définition 12.

Soit f une fonction dérivable sur I alors on dit :

- Que f est convexe sur I si la fonction f' est croissante.
- Que f est concave sur I si la fonction f' est décroissante.

Proposition 18.

- Si f est une fonction dérivable et convexe sur un intervalle I, on a pour tout x et a appartenant à I
$$f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$$
- Si f est une fonction dérivable et concave sur un intervalle I, on a pour tout x et a appartenant à I
$$f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)$$

Remarque

— *Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.*

— *Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièement au-dessous de chacune de ses tangentes.*

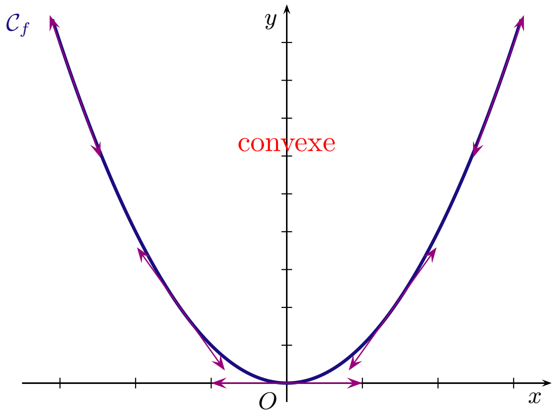
Démonstration.

C'est une conséquence de la formule des accroissements finis :

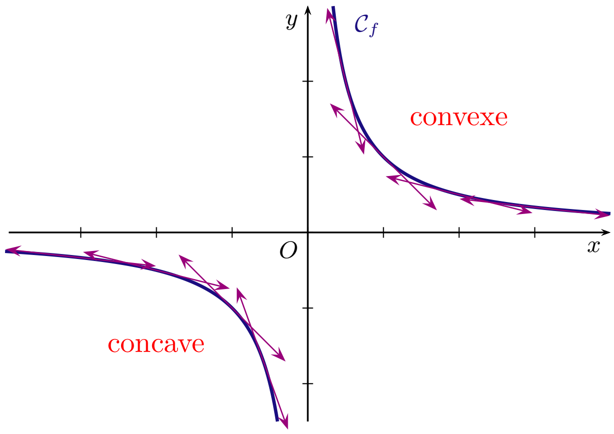
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$ avec $c \in [a;b]$

et de la croissance de f', en distinguant les deux cas $a \leq c \leq x$ et $x \leq c \leq a$

Exemple



La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ est convexe.

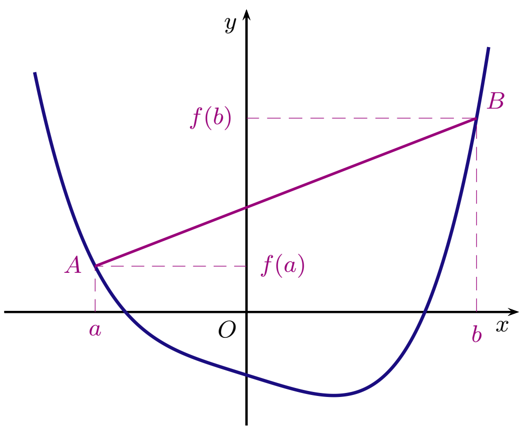


La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

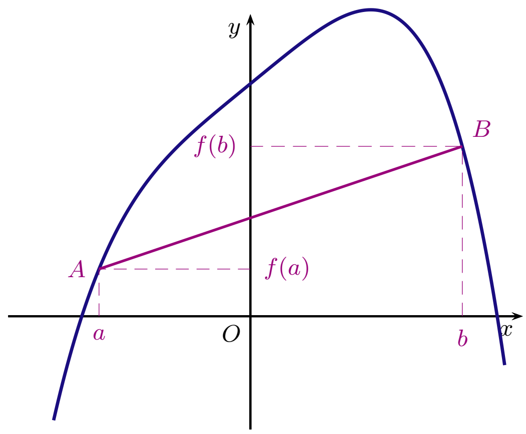
Remarque

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$

- *Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.*
- *Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.*



f est convexe.



f est concave

Proposition 19.

Une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle I est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle I est concave si et seulement si $f'' \leq 0$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

- Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
- Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.

Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘	-162	↗	
convexité de f		**concave**		**convexe**	

f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.

5.4.1 Point d'inflexion

Définition 13.

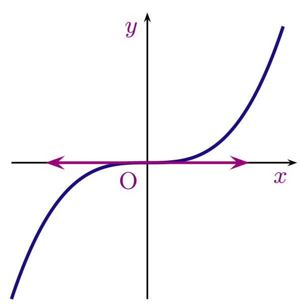
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

Exemple

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube. La tangente au point O à la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty; 0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0; +\infty[$.



La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.

Proposition 20.

- ✧ En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- ✧ Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- ✧ Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.
- Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
- L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
- Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

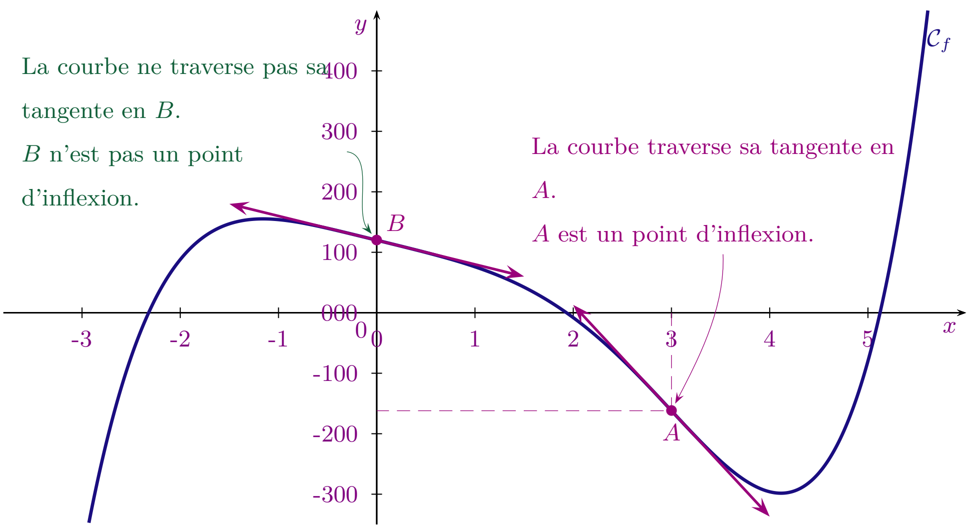
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'	↘				-175		↗

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B\,(0; 120)$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



6 Rappels sur les fonctions usuelles

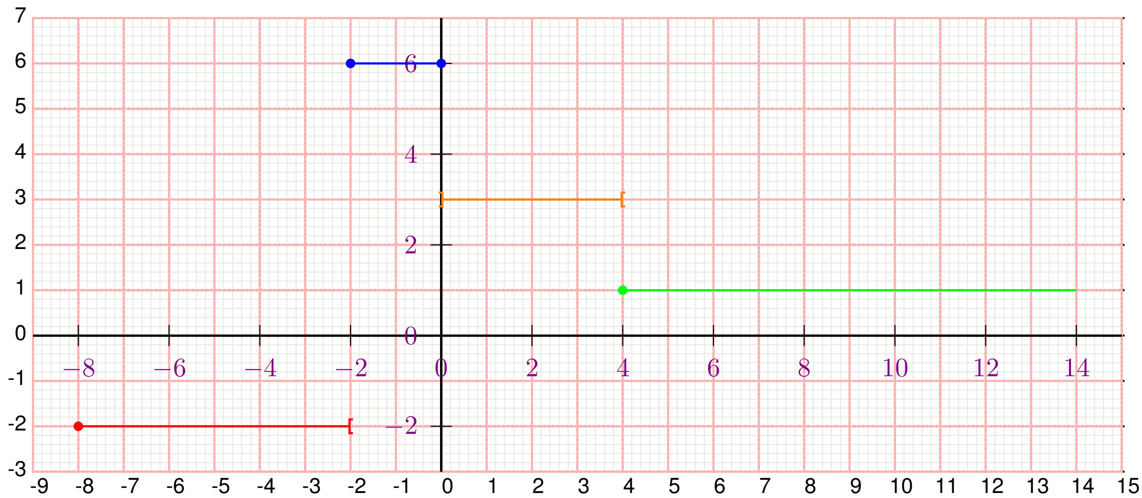
6.1 Fonctions en escalier

Définition 14.

Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple

La fonction définie sur $[-8\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad -8\leq x<-2\\ 6 & \text{si} \quad -2\leq x\leq 0\\ 3 & \text{si} \quad 0<x<4\\ 1 & \text{si} \quad 4\leq x\end{cases}$ est une fonction en escalier.



6.2 Fonctions affines

Définition 15.

a et b sont deux réels donnés. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est appelée **fonction affine**.

Sa représentation graphique est la droite d'équation $y=ax+b$, où :

- Le réel a est le coefficient directeur de cette droite.
- Le réel b est l'ordonnée à l'origine.

Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = a$ constante. D'où les tableaux de variation suivants :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

Exemple

Le graphique ci-contre représente les droites d'équation :

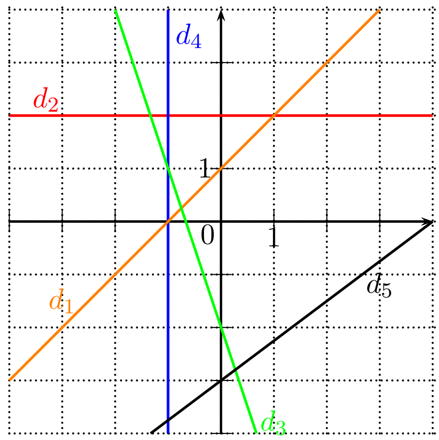
$d_1 : y = x + 1$

$d_2 : y = 2$

$d_3 : y = -3x - 2$

$d_4 : x = -1$

$d_5 : y = \frac{3}{4}x - 3$



6.3 Fonction valeur absolue

Définition 16.

La fonction **valeur absolue** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0; +\infty[\\ -x & \text{pour } x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

On notera $f(x) = |x|$.

Remarque

La fonction valeur absolue représente la distance à 0 du nombre sur l'axe des réels.

Propriété 6.

Soit a et b deux réels alors $|a+b| \leq |a|+|b|$ et $|ab| = |a| \times |b|$

Démonstration.

Tout d'abord il faut constater que quel que soit le réel a on a $a \leq |a|$ et $-a \leq |a|$.

Si $a+b \geq 0$ alors $|a+b| = a+b$ et quelles que soient les valeurs de a et b on a alors $a+b \leq |a|+|b|$ et l'inégalité voulue.

Maintenant si $a+b \leq 0$ alors $|a+b| = -a-b$ et quelles que soient les valeurs de a et b on a alors $-a+(-b) \leq |a|+|b|$ et l'inégalité voulue.

La démonstration de la seconde propriété est laissée en exercice.

Propriété 7.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

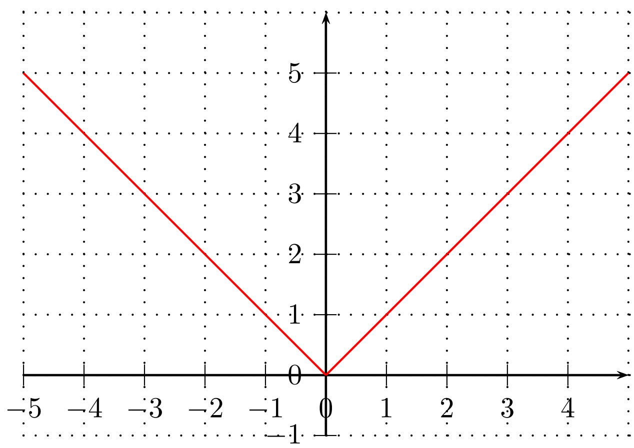
Démonstration.

La continuité ne pose pas de problème sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} -x = |0| = 0$ donc la fonction est continue en 0 et plus globalement sur $\mathbb{R}$.

De la même façon, la dérivabilté ne pose pas de problème sur $\mathbb{R}^*$ mais $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x-0}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{-x-0}{x-0} = -1$ donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Finalement la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



6.4 Fonction logarithme

Définition 17.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive de la fonction continue $x \to \dfrac{1}{x}$ définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ qui s'annule en 1.

Remarque

— $\ln(1) = 0$,

— *la fonction logarithme népérien est dérivable sur* $]\,0\,;\,+\infty\,[$ *et pour tout* $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 8.

Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Exemple

Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \dfrac{1}{2}\ln(96) = \dfrac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \dfrac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.
- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2 + 7x + 3)$ pour $x \in -\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Propriété 9.

On a les limites importantes suivantes :

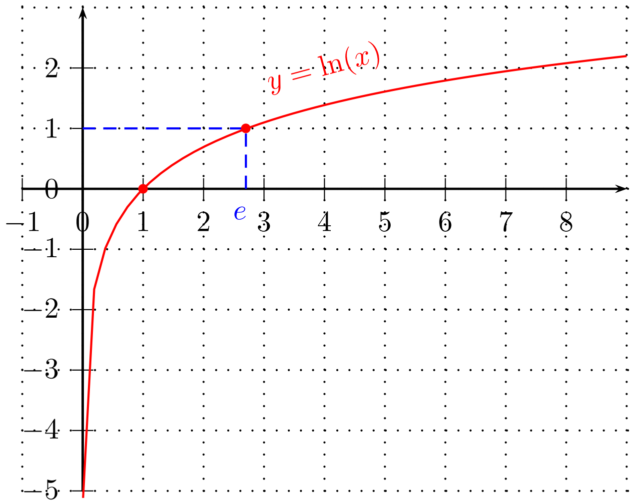
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Remarque

La droite $x = 0$ *est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction* ln.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$



Croissance comparée des fonctions $\ln$ et polynôme

Propriété 10.

Soit α et β deux réels strictement positifs alors :

- $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\beta} \ln^{\alpha}(x) = 0$

Démonstration.

Il faut tout d'abord établir $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (c'est à dire lorsque $\alpha = \beta = 1$).

Pour cela étudions la fonction $\ln(x) - \sqrt{x}$.

C'est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

La limite qui nous intéresse est en $+\infty$ et le signe de la fonction dérivée ne dépend que de $2 - \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui pour x assez grand (plus grand que 4) est négatif donc pour x assez grand la fonction $\ln(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.

Or, par exemple, $\ln(4) - \sqrt{4} = 2(\ln(2) - 1) < 0$ donc pour $x > 4$ on a $\ln(x) - \sqrt{x} \leq 0$ ou de mainère équivalente $0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$ et en divisant cette inégalité par x (pour $x > 4$), on a $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ et en utilisant le théorème des gendarme, on établit finalement $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Dans le cas général maintenant,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha} \underset{X = x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{=} \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(X^{\frac{\alpha}{\beta}})}{X}\right)^{\alpha} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln(X)}{X}\right)^{\alpha} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0.$$

En faisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{X}$ on obtient la seconde limite (exercice).

6.5 Fonction exponentielle

Après avoir défini la fonction logarithme népérien, on remarque que sa dérivée est une fonction strictement positive sur son ensemble de définition. On peut donc appliquer le théorème de la fonction réciproque.

Définition 18.

La fonction **exponentielle**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x.

Remarque

*On dit que la fonction exponentielle est la fonction **réciproque** de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) dans un repère othonormal.*

Remarque

— $\exp(x) > 0$.

— $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.

— $\ln(e^x) = x$.

— $e^{\ln x} = x$ *pour* $x > 0$.

— $x \in \mathbb{R}$ *et* $y = e^x \iff y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\ln(y) = x$.

Propriété 11.

Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

♦ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ♦ $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$. ♦ $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. ♦ $(e^a)^n = e^{an}$.

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances. (inversement au logarithme !).

Exemple

Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^{2+3-4+6} = e^7$.
- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$.
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

Propriété 12.

On a les limites importantes suivantes :

♦ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. ♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Remarque

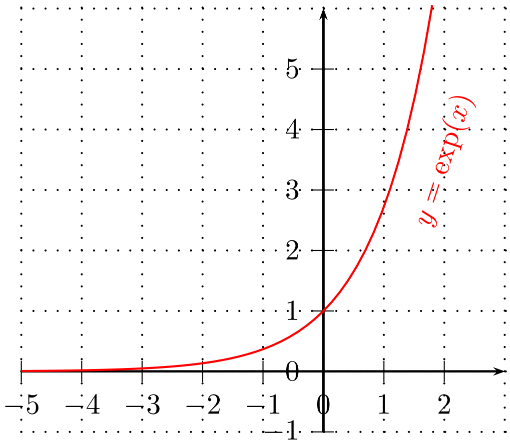
La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction.

Propriété 13.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe		$+$	



Croissance comparée des fonctions $\exp$ **et polynôme**

Propriété 14.

Soit α et β deux réels strictement positifs alors :

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}|x|^{\beta}e^{\alpha x} = 0$

Démonstration.

Si l'on pose $x = \ln X$ alors $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X} = \dfrac{1}{\frac{\ln X}{X}}$, il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty$

En posant $x = \ln(X)$ on a alors :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} \underset{x=\ln(X)}{=} \lim_{X\longrightarrow+\infty}\frac{e^{\alpha\ln(X)}}{\ln^{\beta}(X)} = \lim_{X\longrightarrow+\infty}\frac{X^{\alpha}}{\ln^{\beta}(X)} = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln^{\beta}(X)}{X^{\alpha}}} = +\infty$$

Avec le même changement de variable on prouve la deuxième limite. (exercice)

6.6 Fonctions puissance

Définition 19.

Soit α un nombre réel, la fonction puissance (d'exposant) α, notée f_α est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Exemple

Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$.

Propriété 15.

Pour tout α, la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration.

Pour tout α, nous avons $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ qui est une composée de fonctions dérivables donc dérivable.

Ainsi $f'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \alpha \times \dfrac{1}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \alpha \times \dfrac{1}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

On montre alors que le sens de variation d'une fonction puissance sur $\mathbb{R}_+^*$ dépend de α.

Dans le cas où $\alpha = 0$, la fonction $f_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où les tableaux de variation :

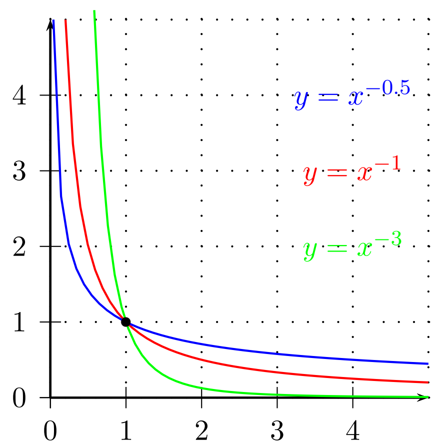
$\alpha < 0$

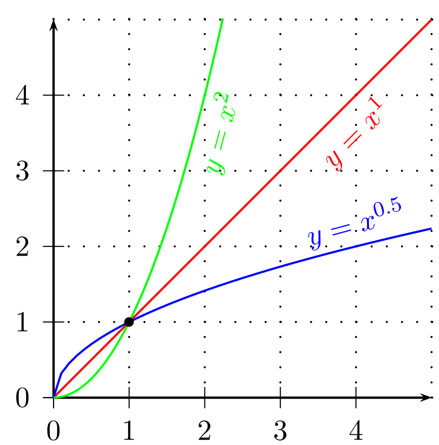
x	0		$+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$		$-$	
variations de f_α	$+\infty$	$\searrow$	0
signe de f_α		$+$	

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$		$+$	
variations de f_α	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f_α		$+$	

Allure des courbes représentatives des fonctions puissance :





Propriété 16.

Soient α et β des réels alors pour tout x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$:

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Démonstration.

Il suffit d'utiliser les propriétés du ln et de l'exponentielle. (exercice)

6.7 Fonctions circulaires

6.7.1 Définitions

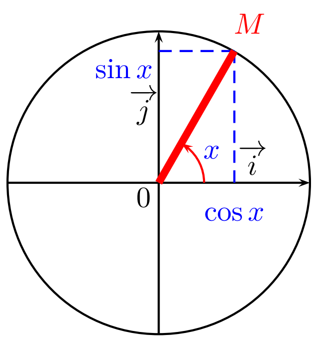
Définition 20.

Soit x un réel, il lui correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
- Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
- La **tangente** de x, notée $\tan x$, est le rapport $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

$\cos x$ et $\sin x$ sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

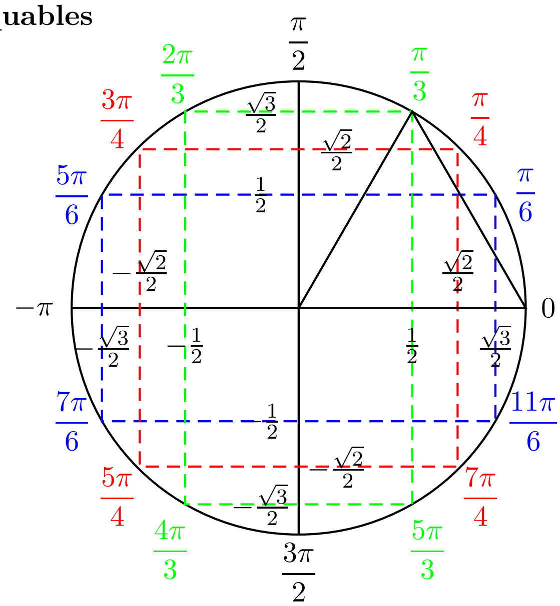
On note : $M \begin{pmatrix} \cos x \\ \\ \sin x \end{pmatrix}$



Propriété 17.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

6.7.2 Valeurs remarquables



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$

6.7.3 Dérivation

Propriété 18.

Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est définie et dérivable sur tout intervalle ne contenant pas $\frac{\pi}{2} + k\pi$, et on a :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

6.7.4 Variations et courbe représentative

La fonction sinus est impaire et $2\pi-$périodique.

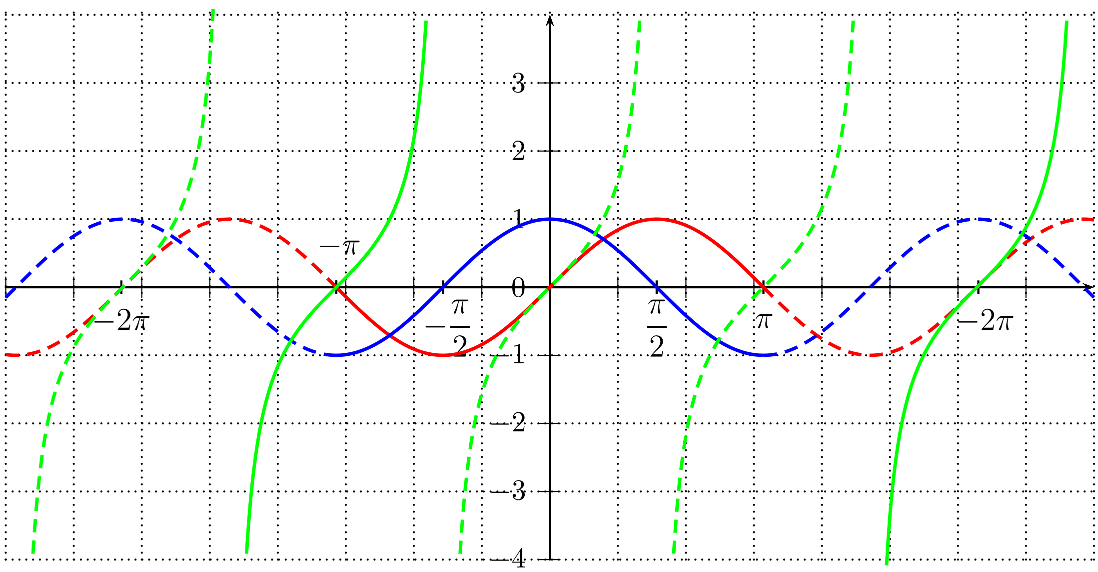
La fonction cosinus est paire et $2\pi-$périodique.

La fonction tangente est impaire et $\pi-$périodique.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$-$	
$\cos(x)$	1	$\searrow$ 0	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{\cos^2(x)}$		$+$	
$\tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Propriété 19.

Soient a et b des réels alors on a les formules dites d'addition suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Propriété 20.

Soient a et b des réels alors

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$