CHAPITRE

# 7 Calcul Intégral

*L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et sa place parfois un problème. Les « méthodes intégrales » en Grèce antique l'atteste (voir méthode d'exhaustion), et bien qu'il faille attendre le calcul infinitésimal pour une première formalisation, elles nous avaient déjà offert de profonds et beaux résultats : les Athéniens évaluèrent les grandeurs de l'espace puis en démontrèrent implicitement l'existence et l'unicité ; au* $XVII^e$ *siècle naissent des méthodes générales de « calcul de l'infini » (rectification de courbes, quadratures, etc). C'est alors que la méthode des indivisibles de* ***Cavalieri*** *voit le jour.*

***Cavalieri*** (1598 – 1647)

*C'est Leibniz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration (Geometria recondita, 1686), perpétué jusqu'aujourd'hui, d'une part par un symbolisme inégalé reliant intégration et dérivation, d'autre part par la mise en place des principaux théorèmes.*

*La formalisation de cette théorie a revêtu diverses formes. Elle aboutit tardivement, à cause de la complexité des problèmes soulevés :*
*que sont les fonctions ? les réels ? (ces questions ne furent pleinement élucidées que grâce au développement de l'analyse au* $XIX^e$ *siècle) ; quelles fonctions peuvent s'intégrer ? (c'est la question de l'intégrabilité ; elle est liée, entre autres, à des problèmes de convergence).*

*L'intégrale de Riemann (Bernhard Riemann, 1854, publication posthume en 1867) puis l'intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) ont marqué les esprits par leur formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine ; en témoignent des extensions telles que l'intégrale d'Ito, l'intégrale de Kurzweil-Henstock, ou la récente construction de Bongiorno (1996).*

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration

# Sommaire

**Objectifs du chapitre :**

- Savoir calculer une primitive de fonction
- Savoir étudier une primitive de fonction
- Aborder la définition d'intégrale (au sens de Riemann) sur un segment
- Connaître et utiliser les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue
- Calculer des intégrales sur des segments
- Connaître et utiliser les principales techniques d'intégration pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Calculer des longueurs, des aires, des volumes à l'aide de l'intégrale dans des cas particuliers.

# 1 Primitives

## 1.1 Définitions

**Définition 1.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

On appelle **primitive** de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

**Exemple**

Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

**Exemple**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de $f$.

- On calcule $F'$, la dérivée de $F$ et on vérifie que l'on obtient $f$ :
- $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} + 0 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = f(x)$.

**Proposition 1.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

Si $f$ possède deux primitives $F$ et $G$ sur $I$ alors elles ne diffèrent que d'une constante.

**Démonstration.**

Considérons $F$ et $G$ et étudions $F-G$ sur $I$.

Par définition et propriétés des fonctions dérivables, $F-G$ est dérivable et de dérivée nulle.

Donc $F-G$ est constante sur $I$ c'est à dire $F=G+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

**Théorème 1.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, $k$ un réel, $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$ fixés.

- Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, les primitives de $f$ sont les fonctions du type $F(x)+k$
- Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, il existe une **unique** primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0)=y_0$.

**Exemple**

- Les fonctions $F_0(x)=\dfrac{1}{4}x^4$, $F_1(x)=\dfrac{1}{4}x^4+1$, $F_2(x)=\dfrac{1}{4}x^4+2$, ... , $F_k(x)=\dfrac{1}{4}x^4+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonctions $f(x)=x^3$.
- Cependant, il n'existe qu'une unique primitive $F$ de $f$ vérifiant $F(0)=1$ : il s'agit de $F_1$.

## 1.2 Calculs de primitives

L'objet de cette section est de présenter les primitives usuelles que vous rencontrerez.

### 1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».

Les fonctions $f$ suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle $I$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{-1\}$.

**Obtention de primitives par lecture inverse du tableau des dérivées :**

| $f(x)$ | une primitive $F(x)$ | conditions |
|---|---|---|
| $0$ | $k$ | $I=\mathbb{R}$ |
| $a$ | $ax$ | $I=\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $I=\mathbb{R}$ si $n>0$<br>$I=\mathbb{R}^*$ si $n<0$ |

| $f(x)$ | une primitive $F(x)$ | conditions |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $I=\mathbb{R}_+^*$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $I=\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $I=\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $I=\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln x$ | $I=\mathbb{R}_+^*$ |

**Remarque**

*Pour obtenir toutes les primitives d'une fonction $f$ donnée, il suffit de rajouter une constante.*

**Exemple**

- Une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est $F(x)=\dfrac{1}{9}\,x^9$.
- Une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^8}$ est $F(x)=-\dfrac{1}{7\,x^7}$.

### 1.2.2 Opérations sur les primitives

$u$ et $v$ sont des fonctions de primitives $U$ et $V$ sur un intervalle $I$.

**Tableau des opérations sur les primitives :**

| Forme de la fonction | Une primitive | Conditions |
|---|---|---|
| $u+v$ | $U+V$ | |
| $k\times u$ | $k\times U$ | |
| $u'\,u^n$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ | $n\in\mathbb{N}$ |
| $\dfrac{u'}{u^n}$ | $-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$ | $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | $u(x)>0$ |
| $u'\cos u$ | $\sin u$ | |
| $u'\sin u$ | $-\cos u$ | |
| $u'e^u$ | $e^u$ | |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln u$ | $u(x)>0$ |

**Exemple**

On cherche à déterminer dans chacun des cas suivant une primitive $F$ de le fonction $f$ sur l'intervalle $I$ :

- $f(x) = 4x^2$ et $I = \mathbb{R}$ : $F(x) = 4 \times \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{4x^3}{3}$.
- $f(x) = 2x(x^2-1)^5$ et $I = \mathbb{R}$ : $f(x) = (x^2-1)'(x^2-1)^5$ donc $F(x) = \dfrac{(x-1)^6}{6}$.
- $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x-6}}$ et $x > 2$ : $f(x) = \dfrac{(3x-6)'}{\sqrt{3x-6}}$ donc $F(x) = 2\sqrt{3x-6}$.
- $f(x) = 2x + 2\cos(2x) - 6\sin(3x-1)$ et $I = \mathbb{R}$ : $f(x) = 2x + (2x)'\cos(2x) - 2(3x-1)'\sin(3x-1)$ donc $F(x) = x^2 + \sin(2x) + 2\cos(3x-1)$.
- $f(x) = -9\ e^{-3x-1}$ et $I = \mathbb{R}$ : $f(x) = 3(-3x-1)'e^{-3x-1}$ donc : $F(x) = 3\ e^{-3x-1}$.
- $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-x+3}$ et $I = \mathbb{R}$ : $f(x) = \dfrac{2(x^2-x+3)'}{x^2-x+3}$ donc : $F(x) = 2\ln(x^2-x+3)$.

# 2 Intégrale d'une fonction

## 2.1 Rapide approche théorique

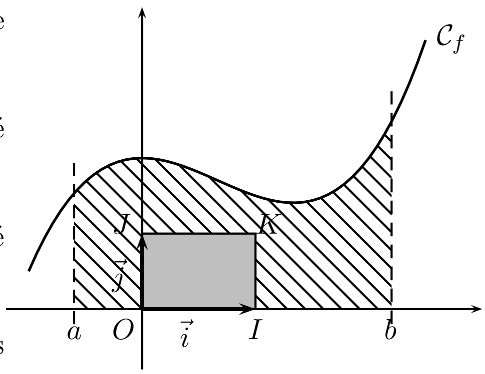
Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$.

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ : l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

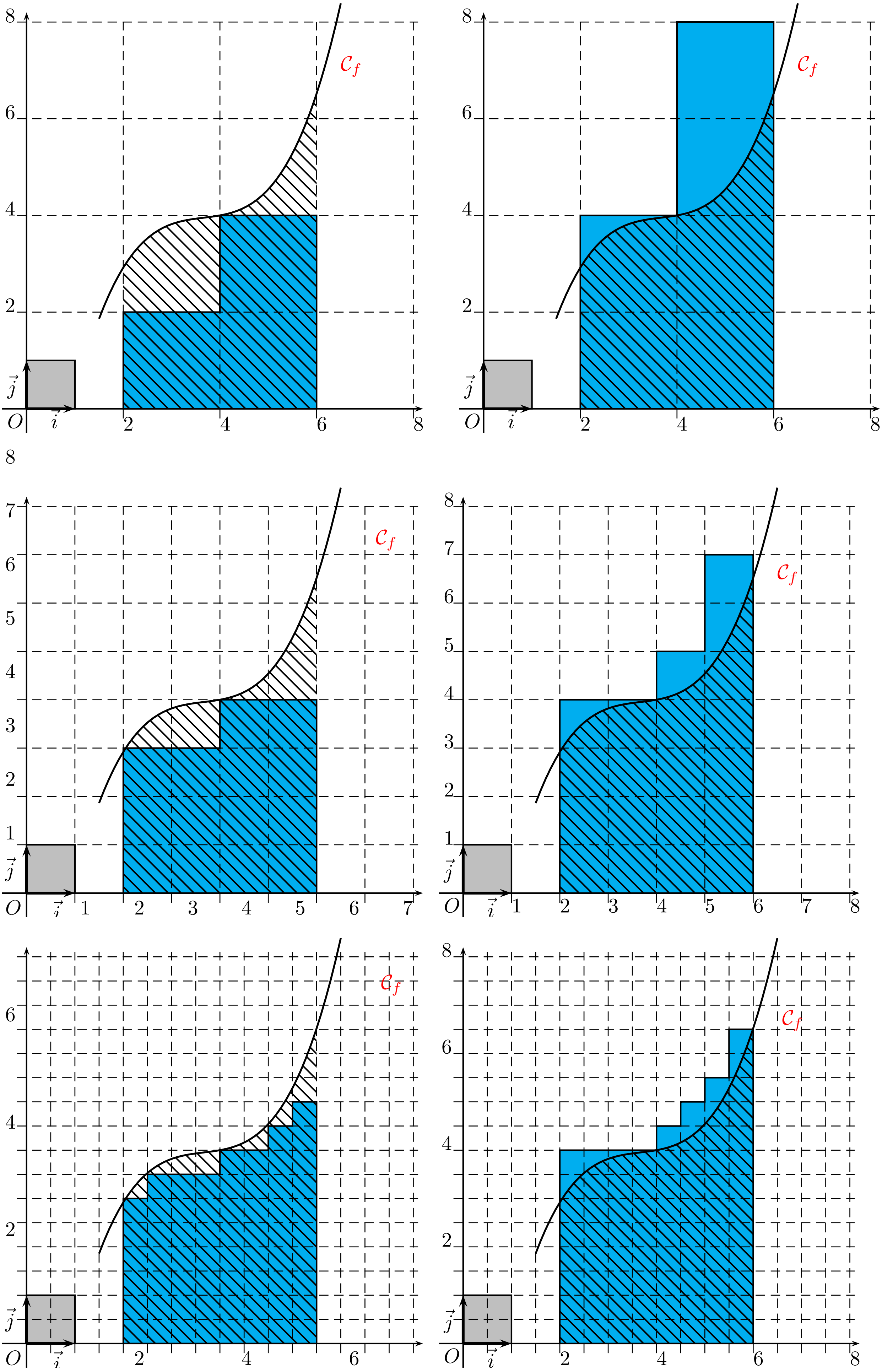
Plus précisément, le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$.




Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction $f$ de $a$ à $b$** ; on la note $\int_a^b f(x)dx$.

Nous allons chercher à approcher la valeur de cette aire par découpage plus ou moins fin du segment $[a;b]$. En prenant des valeurs majorantes ou minorantes (sur les segments de ces découpages) de la fonction nous obtenons les aires de rectangles (majorants ou minorant celles de l'intégrale) que nous pouvons sommer (puisqu'en nombre fini).

Les graphiques suivants donnent la courbe représentative d'une fonction $f$ et précisent l'encadrement de l'intégrale $\int_2^6 f(x)dx$ par valeurs supérieures et inférieures.

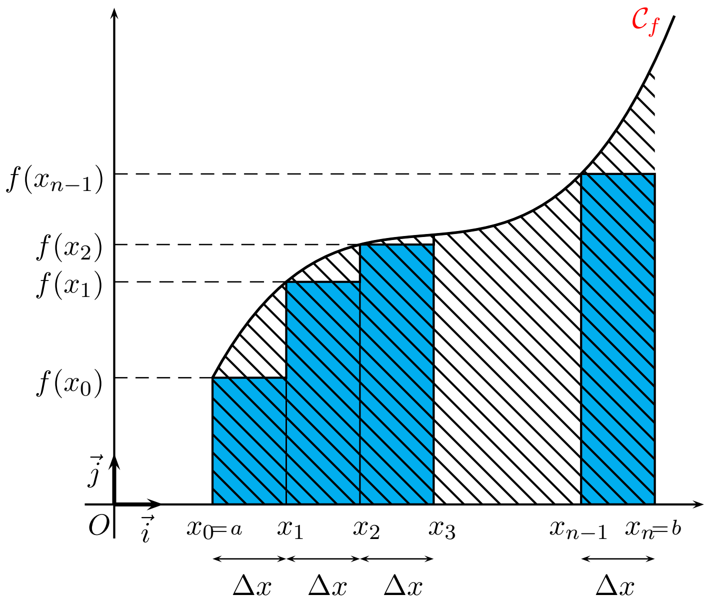

$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_f$
$O$
$\vec{i}$
$\vec{j}$

La situation précédente est généralisable : soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

On découpe l'intervalle $[a;b]$ en $n$ intervalles de longueurs $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ :

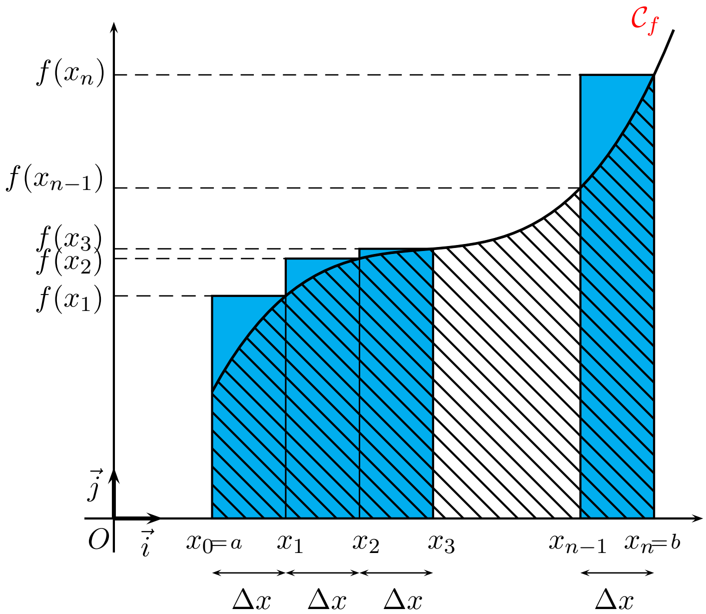
$$[x_0;x_1]\ ;\quad [x_1;x_2]\ ;\quad [x_2;x_3]\ ;\quad \ldots\ ; [x_{n-1};x_n]$$

avec $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, $\ldots$ La suite $(x_p)$ des abscisses est une suite arithmétique de raison $\Delta x$. En particulier, pour tout entier $k$, la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = x_0 + k\Delta x$.




Dans ce premier cas, l'aire bleue est la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

$$s_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \ldots\ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$




Dans ce deuxième cas, l'aire bleue est aussi la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \ldots\ + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

L'aire hachurée est comprise entre ces deux aires bleues : $s_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_n$

Ces deux suites $(s_n)$ et $(S_n)$ sont dites adjacentes (voir la leçon sur les suites) et convergent donc vers une limite commune qui est l'aire recherchée : l'intégrale de $f$ de $a$ à $b$.

**Remarque**

— *La notation $\int_a^b f(x)\,dx$ (introduite par Leibniz, et/ou Newton, au XVII$^e$ siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où $\Delta x \to 0$, et donc $n \to +\infty$, notée finalement $dx$ (largeur infinitésimale), et le symbole $\sum$ se transformant en $\int$ :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

— *La variable $x$ est dite muette. La lettre qui la désigne n'a pas d'importance :*
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \ \ldots$

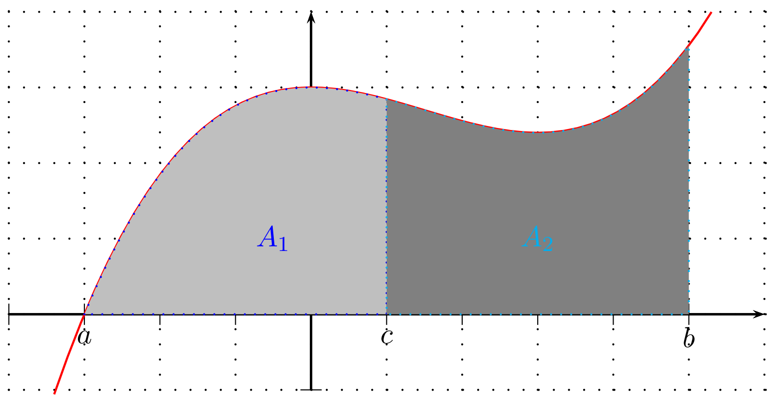
Cette construction se généralise aux fonctions continues sur un segment mais le lien entre intégrale et aire située entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses ne vaut **que pour les fonctions à valeurs positives**.

## 2.2 Premières propriétés

**Proposition 2** (Relation de Chasles)**.**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$ et $c \in [a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

**Interprétation graphique :**




**Proposition 3** (Interversion des bornes)**.**

Soit $f$ une fonction continue sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

**Proposition 4** (Relation d'ordre).

Soient $f, g : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Si, pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.

## 2.3 Intégrales et primitives

**Théorème 2.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et $a \in I$. Alors la fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est **l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.**

**Démonstration.**

Soit $x_0$ un réel de $I$, et $h$ un réel tel que $x_0 + h \in I$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Comme $f$ est continue sur $I$, $f$ est en particulier continue sur $[x_0; x_0+h]$, et donc pour tout $t \in [x_0; x_0+h]$, $\quad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq f(t) \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$
L'intégrale conserve l'ordre,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)dt$$

soit $\quad (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$
c'est-à-dire, $\quad h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$
ou encore, $\quad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$.
Quand $h$ tend vers 0, l'intervalle $[x_0; x_0+h]$ se réduit à $\{x_0\}$, et donc, comme $f$ est continue en $x_0 \in I$, $\quad \lim_{h\to 0}\left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)\right) = f(x_0)$
Ainsi, d'aprés le théorème des gendarmes, $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ce qui signifie exactement que la fonction $F$ est dérivable en $x_0$, et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in I$, et donc on a bien $F' = f$ : $F$ est **une primitive** de $f$.
On a de plus, $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, et donc, $F$ est **la primitive** de $f$ s'annulant en $a$.

**Exemple**

On a ainsi :

- $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$
- $\sin(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t)\, dt$

**Définition 2.**

On appelle **intégrale de $f$ sur** $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $I$. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

**Exemple**

Calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_2^3 x\, dx$ :

- Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
- donc, $\displaystyle\int_2^3 x\, dx = F(3) - F(2) = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

**Remarque**

— *L'intégrale d'une fonction $f$ sur $[a;b]$ est indépendante du choix de la primitive $F$.*

— *On note aussi* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

— *Dans l'écriture* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, *la variable $x$ est « muette », ce qui signifie que*
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$
*Le $dx$ ou $dt$ détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : $x$, ou $t$.*

## 2.4 Aire d'une fonction positive

**Proposition 5.**

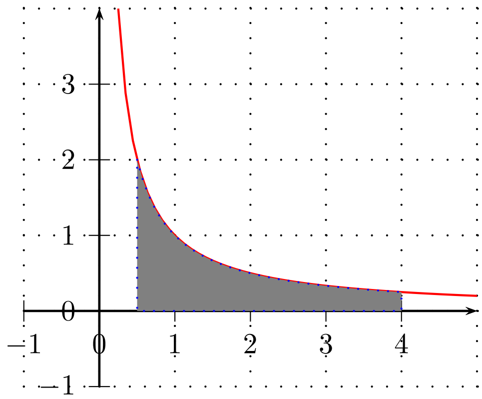
Si $f$ est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

**Exemple**

Calcul de l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $\frac{1}{x}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{4} = \ln 4 - \ln \frac{1}{2} = \ln 4 + \ln 2$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}dx = \ln 8 = 3\ln 2 \text{ U.A. } \approx 2,08 \text{ cm}^2.$$




## 2.5 Aire d'une fonction négative

Si la fonction $f$ est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

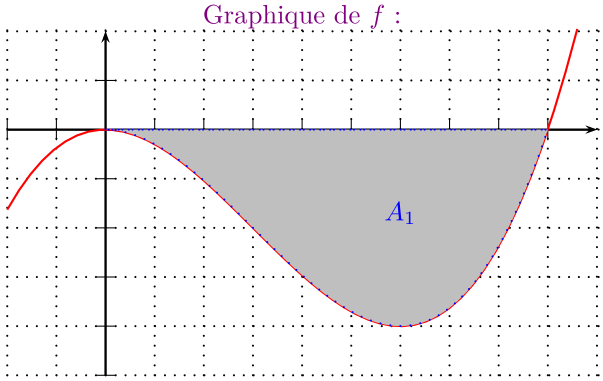
Dans ce cas, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b [-f(x)]\ dx$.

**Exemple**

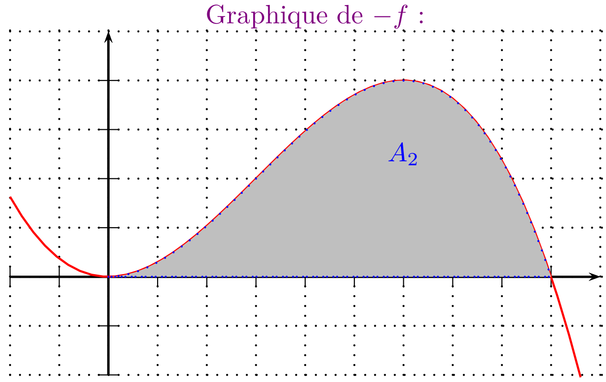
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$.

$f$ est négative sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 9\ ]$. Pour calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 9$, il suffit de calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $-f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 9$ :

Graphique de $f$ :




Graphique de $-f$ :




$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \int_0^9 [-f(x)]\ dx = \int_0^9 \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}\right)\ dx = \left[-\frac{x^4}{108} + \frac{x^3}{9}\right]_1^9 = \frac{81}{4} \text{ U.A.}$$

.

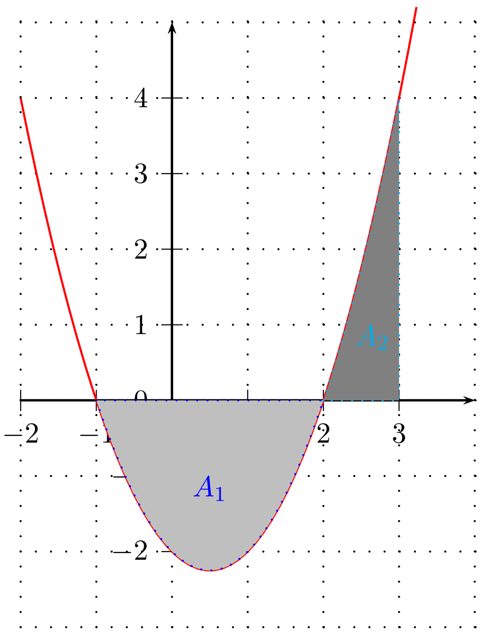
### 2.6 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 - x - 2$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$ : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [-f(x)]\ dx + \int_{2}^{3} [f(x)]\ dx$$
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\ dx + \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2)\ dx$$
$$\mathcal{A} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3}$$
$$\mathcal{A} = \left(\frac{10}{3} + \frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{10}{3}\right)$$
$$\mathcal{A} = \frac{19}{3} \approx 6,33 \text{ U.A.}$$




# 3 Propriétés de l'intégrale

### 3.1 Linéarité

**Proposition 6.**

Soient $f, g : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $\lambda$ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

**Exemple**

Calcul de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^2 \left(6x + \frac{5}{x}\right) dx$ :

- $I = 3 \displaystyle\int_1^2 2x\ dx + 5 \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx$
- $I = 3\ \left[x^2\right]_1^2 + 5\ \left[\ln x\right]_1^2$
- $I = 3(4 - 1) + 5(\ln 2 - \ln 1)$
- $I = 9 + 5 \ln 2.$

## 3.2 Symétries

**Définition 3.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ centré à valeurs réelles, on dit que :

- $f$ est une **fonction paire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$
- $f$ est une **fonction impaire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$

**Propriété 1.**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $I = [-a; a]$, $f$ une fonction continue et paire sur $I$ alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

**Démonstration.**

Se reporter à la partie « Changement de variables »

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer $I = \displaystyle\int_{-4}^{4} x^4\,dx$ La fonction $f(x) = x^4$ est paire car $(-x)^4 = x^4$, ainsi

$I = \displaystyle\int_{-4}^{4} x^4\,dx = 2\int_{0}^{4} x^4\,dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^5 = \frac{2048}{5}$

**Propriété 2.**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $I = [-a; a]$, $f$ une fonction continue et impaire sur $I$ alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

**Démonstration.**

Se reporter à la partie « Changement de variables »

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\ &-\int_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer $I = \int_{-4}^{4} x^3 \, dx$ La fonction $f(x) = x^3$ est impaire car $(-x)^3 = -x^3$, ainsi $I = \int_{-4}^{4} x^3 \, dx = 0$

**Définition 4.**

Soit $f$ une fonction définie sur $D$ à valeurs réelles, on dit que : $f$ est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$

- $x + T \in D$
- $f(x+T) = f(x)$.

La fonction $f$ est dite périodique de période $T$.

**Propriété 3.**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$, périodique de période $T$ et $a \in D$ alors :

$$\int_{a}^{a+T} f(x) \, dx = \int_{0}^{T} f(x) \, dx$$

**Démonstration.**

Se reporter à la partie « Changement de variables »

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+T} f(x) \, dx \quad &= \int_{a}^{0} f(x) \, dx + \int_{0}^{T} f(x) \, dx + \int_{a}^{a+T} f(x) \, dx = \\
&- \int_{0}^{a} f(x) \, dx + \int_{0}^{T} f(x) \, dx + \int_{0}^{a} f(x+T) \, dx \\
&= - \int_{0}^{a} f(x) \, dx + \int_{0}^{T} f(x) \, dx + \int_{0}^{a} f(x) \, dx = \int_{0}^{T} f(x) \, dx
\end{aligned}$$

Plus généralement on a la proposition suivante :

**Propriété 4.**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $D$, périodique de période $T$.

$a, b \in D$ avec $a < b$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) \, dx$$

**Démonstration.**

Se reporter à la partie « Changement de variables » et le faire en exercice.

## 3.3 Inégalités

**Proposition 7.**

Soient $f, g : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

- **Positivité** : si, pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.
- **Valeur absolue** : $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_a^b |\ f(x)\ |\ dx$.

**ATTENTION !**

La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ sans avoir $f$ positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ :

— $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\ dx = [x^2 - x]_0^3 = 6$. Donc, $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\ dx \geq 0$.

— Cependant, la fonction $x \to 2x - 1$ n'est pas positive sur $[\ 0\ ;\ 3\ ]$.

Graphiquement, toutes ces propriétés peuvent se « voir » assez facilement en considérant les aires obtenues pour chacune des intégrales.

## 3.4 Égalité et inégalité de la moyenne

**Proposition 8.**

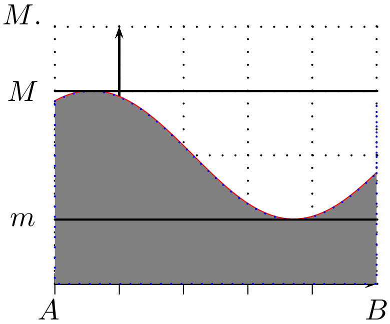
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$.

S'il existe des réels $m$, $M$ et $k$ tels que pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on ait :

- $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$.
- $|f| \leq k$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx \leq k(b-a)$.
- Il existe $c \in ]a; b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c)$.

**Interprétation graphique :**

Dans le cas où $f$ est positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ et où $m \geq 0$, l'aire de la partie égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est comprise entre l'aire du rectangle de base $AB$ de hauteur $m$ et l'aire du rectangle de base $AB$ de hauteur $M$.



**Définition 5.**

Soit $f : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $a \neq b$, on appelle **valeur moyenne** de $f$ sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $\mu_f$ défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

**Interprétation graphique :**

La droite d'équation $y = \mu_f$ est la droite horizontale telle que l'aire des parties de plan délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part et les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = m_f$ soient de même valeur.

**Exemple**

La valeur moyenne sur $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ de la fonction carré est : $\mu = \int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}$.

**Définition 6.**

Soit $f : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $a \neq b$, on appelle **valeur efficace** de $f$ sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $\mu_f$ défini par

$$\mu_f^{eff} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exemple**

La valeur efficace sur $[\ 1\ ;\ 4\ ]$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est :

$\mu_f^{eff} = \left(\frac{1}{4-1}\int_1^4 \frac{1}{x^2}\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^4\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{4}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

## 3.5 Inégalité des accroissements finis

Les théorèmes de comparaison d'intégrales permettent d'obtenir des encadrements d'une fonction lorsqu'on sait encadrer sa dérivée.

**Proposition 9** (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f$ une fonction dont la dérivée $f'$ est continue sur un intervalle $[\ a\ ,\ b\ ]$.

S'il existe trois réels $m$, $M$ et $k$ tels que, pour tout $x$ de $[\ a\ ,\ b\ ]$, on ait

- $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
- $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

# 4 Méthodes de calcul d'intégrales

## 4.1 Intégration par partie

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$. La dérivée du produit $uv$ est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{d'où} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

Dans le cas où $u'$ et $v'$ sont des fonctions continues, on peut énoncer la propriété suivante :

**Proposition 10.**

Si $a$ et $b$ sont deux éléments de $I$, on a alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

soit encore, si on choisit $uv$ comme primitive de $(uv)'$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

**Exemple**

On désire calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx$.

- On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
- Donc : $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = (1e^1 - 0\ e^0) - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$

## 4.2 Changement de variables

### 4.2.1 Changement de variable du type $x \to x + \beta$

**Proposition 11.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle du type $[a+\beta, b+\beta]$ où $a$, $b$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x+\beta)\ dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(t)\ dt.$$

**Exemple**

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2 \, dx$.

- On peut faire le calcul directement en remarquant qu'une primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3\ ,-2\ ]$ est $\frac{1}{3}(x+3)^3$.
- On peut également effectuer un calcul plus simple :
  $I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2 \, dx = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

### 4.2.2 Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

**Proposition 12.**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[\ \alpha a\ ,\ \alpha b\ ]$, où $\alpha \neq 0$, alors

$$\int_a^b f(\alpha x) \, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x) \, dx.$$

**Exemple**

On se propose de calculer $I = \int_0^1 e^{2x} \, dx$ :

- $I = \int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^t \, dt = \frac{1}{2} \left[e^t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

### 4.2.3 Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

**Proposition 13.**

Soit $\varphi$ une fonction dérivable sur un intervalle $I = [\ a\ ,\ b\ ]$ de dérivée continue sur $I$.

Pour toute fonction $f$ définie et continue sur l'intervalle $\varphi(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f\left[\varphi(t)\right] \varphi'(t) \, dt.$$

**Démonstration.**

Utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées.

**Méthode.**

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en posant $t=\sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x=t^2=\varphi(t)$ :

- On calcule les nouvelles bornes d'intégration :

  Pour $x \in [\ 1\ ,\ 4\ ]$, on obtient $t \in [\ 1\ ,\ 2\ ]$

- On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable : on a $\displaystyle\frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx = \frac{1}{\varphi(t)+\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\ dt = \frac{1}{t^2+t}\times 2t\ dt.$

- donc : $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \quad = \int_1^2 \frac{2t\ dt}{t^2+t} = = 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\ dt$

  $\displaystyle = 2\left[\ \ln(1+t)\ \right]_1^2 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\left(\tfrac{3}{2}\right).$

# 5 Applications

## 5.1 Croissance comparée

On appelle croissance comparée le fait de comparer sous forme de limite la vitesse de croissance de certaines fonctions en 0 ou en $+\infty$ généralement.

**Théorème 3.**

La fonction ln est négligeable devant $x$ quand $x$ tend vers $+\infty$ $\qquad \displaystyle\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$

La fonction ln est négligeable devant $\displaystyle\frac{1}{x}$ quand $x$ tend vers 0 $\qquad x\ln(x) \underset{x\longrightarrow0^+}{\longrightarrow} 0$

**Démonstration.**

Pour tout $t\geq 1$, on a $\displaystyle\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}$. Fixons $x\geq 1$. Il vient que $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ ce qui s'écrit aussi $\ln(x)\leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)\leq 2\sqrt{x}$.

Divisant cette inégalité par $x$, on obtient $\displaystyle 0\leq\frac{\ln(x)}{x}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$ ce qui amène, par application du théorème des gendarmes à : $\displaystyle\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par ailleurs : en posant $\displaystyle X=\frac{1}{x}$ on a $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty.$

Ainsi $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = -\lim_{X\to+\infty} X\ln(X) = 0$

**Théorème 4.**

La fonction exp est prépondérante devant $x$ quand $x$ tend vers $+\infty$ $\quad \dfrac{\exp(x)}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

La fonction exp est prépondérante devant $x$ quand $x$ tend vers $-\infty$ $\quad x\exp(x) \underset{x\longrightarrow-\infty}{\longrightarrow} 0$

**Démonstration.**

Si l'on pose $x=\ln X$ alors $\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{X}{\ln X}=\dfrac{1}{\frac{\ln X}{X}}$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln X}{X}}=+\infty$

La seconde limite se démontre de la même façon

Plus généralement on peut montrer que :

**Théorème 5.**

Pour tout $\alpha$, $\beta$, $\gamma>0$, on a :

$$\frac{(\ln(x))^\gamma}{x^\beta} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x^\beta|\ln(x)|^\gamma \underset{x\longrightarrow0}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad |x|^\beta e^{\alpha x} \underset{x\longrightarrow-\infty}{\longrightarrow} 0$$

**Démonstration.**

Comme $\beta$, $\gamma>0$ :

$$\frac{(\ln(x))^\gamma}{x^\beta}=\left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma=\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\gamma}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma$$

Si l'on pose $X=x^{\frac{\beta}{\gamma}}$ alors $\left(\dfrac{\gamma}{\beta}\dfrac{\ln(X)}{X}\right)^\gamma \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$

Par composition de limite et par l'utilisation de la limite $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les limites se démontrent de la même façon

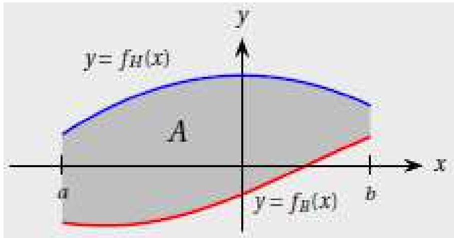
## 5.2 Calculs de longueurs, surfaces et volumes

### 5.2.1 Aire entre deux courbes

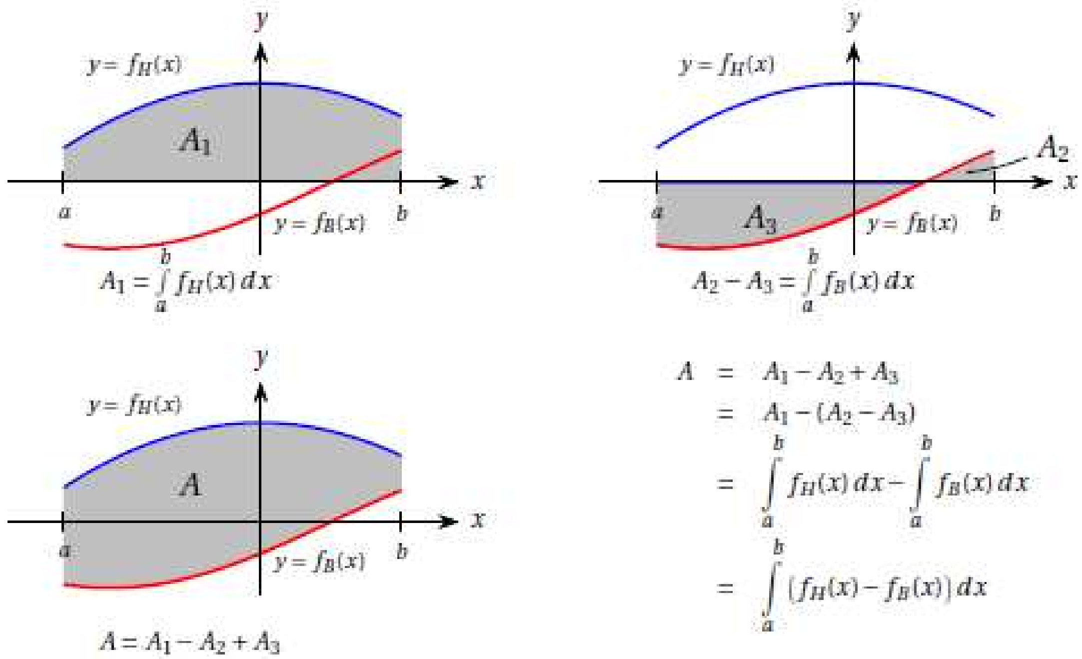
**Théorème 6.**

L'aire $\mathcal{A}$ de la région bornée par les courbes $y = f_H(x)$ (la fonction du Haut) et $y = f_B(x)$ (la fonction du Bas) ainsi que par les droites verticales $x = a$ et $x = b$, où $f_H(x) \geq f_B(x)$ pour $a \leq x \leq b$, est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f_H(x) - f_B(x))\, dx$$




**Illustration**




Ici $\mathcal{A}$ désigne véritablement l'aire de la région située entre les courbes

**Remarque**

*On peut aussi délimiter un domaine suivant des fonctions de la variable $y$. On appliquera alors la même méthode.*

**Exemple**

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes suivantes : $y = 5 + x^2$ , $y = 1 - x^2$ , $x = 0$ et $x = 2$

On vérifie que pour tout $x \in [0; 2]$ l'une des courbes est au dessus de l'autre. Ici c'est $y = 5 + x^2$.

On calcule $\displaystyle\int_0^2 \left(5 + x^2 - (1 - x^2)\right) dx$

$$\int_0^2 \left(5 + x^2 - (1 - x^2)\right) dx = \int_0^2 \left(4 + 2x^2\right) dx = \left[4x + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{40}{3}$$

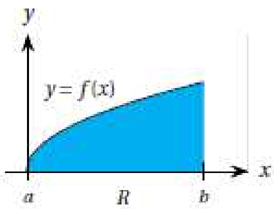
### 5.2.2 Solide de révolution

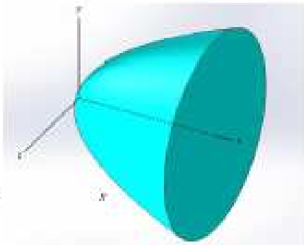
**Définition 7.**

Un solide de révolution est un solide engendré par la révolution (un tour complet) d'une région plane autour d'une droite de l'espace.

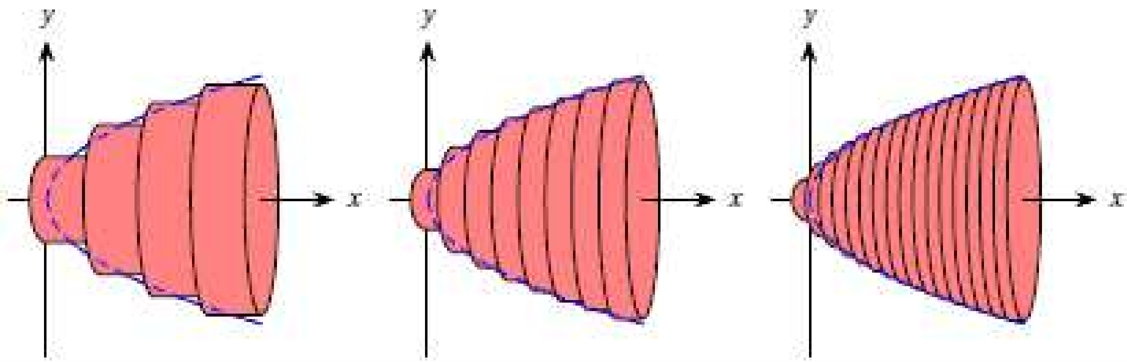
Considérons une fonction $f$ continue et dérivable.

Lorsque la courbe d'équation $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, tourne autour de l'axe des $x$, la région $R$ qu'elle délimite dans le plan $xy$ engendre alors un solide de révolution, notons-le $S$.



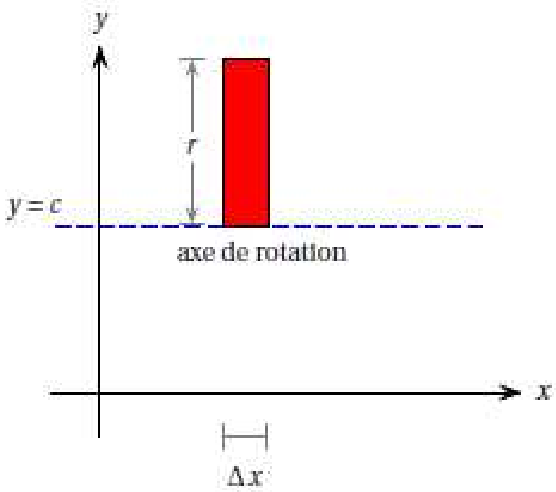



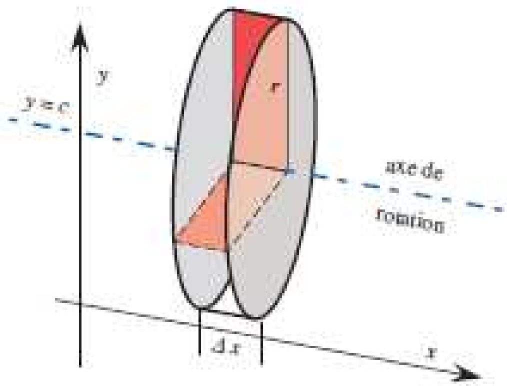
Pour calculer l'aire d'une région plane, nous avons procédé par passage à la limite avec une somme d'aires de rectangles très étroits. Nous utiliserons un raisonnement similaire pour calculer le volume d'un solide de révolution, additionnant cette fois les volumes de disques minces (le mot disque est en général utilisé alors qu'il s'agit de cylindre droit) .




Comment calcule-t-on le volume de ces disques ? Remarquons que ces disques sont eux-mêmes des solides de révolution : chacun d'eux est engendré par la révolution d'un rectangle. Notons $r$ la hauteur de l'un de ces rectangles ($r$ correspond alors au rayon du disque engendré). Remarquons, par ailleurs, que $r$ est une fonction de $x$ ; il dépend du disque considéré. Si l'axe de rotation est horizontal (y = c), alors l'épaisseur du rectangle est $\Delta x$ et le volume du disque est donné par :

$$\text{Volume du disque} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{épaisseur} = \pi r^2 \Delta x$$




Puisque le volume du solide de révolution $S$, noté $V_S$, peut être trouvé en calculant les volumes de $n$ disques répartis le long de l'intervalle $[a; b]$ et en faisant tendre le nombre de disques vers l'infini, il sera donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} V_S &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \text{Volume du } i^e \text{disque} \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (\pi r_i^2 \Delta x) && \text{où } \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ &= \int_a^b \pi r^2 \, dx && \text{où } r \text{ est une fonction de } x \end{aligned}$$

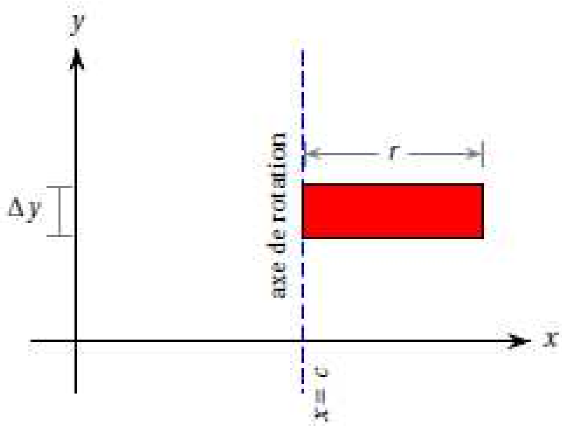
**Théorème 7.**

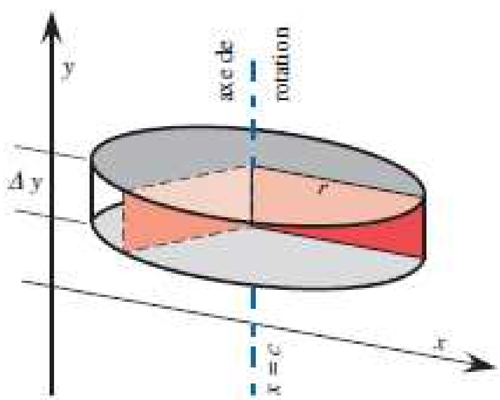
Soit $f$ une fonction définie sur $[a; b]$ continue et dérivable.
Le volume du solide de révolution $S$, noté $V_S$, engendré par la révolution suivant l'axe des abscisses de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \in [a; b]$ est donné par :

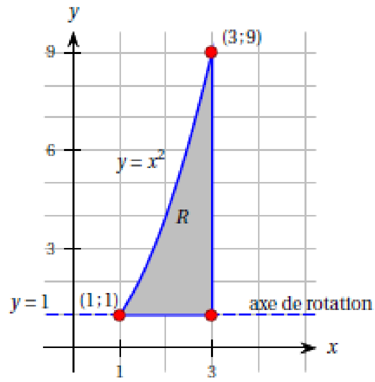
$$V_S = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

**Remarque**

*Si l'axe de révolution est vertical, on utilisera un découpage en disques horizontaux d'épaisseur $\Delta y$ et de volume $\pi r^2 \Delta y$ où $r$ sera alors une fonction de $y$.*



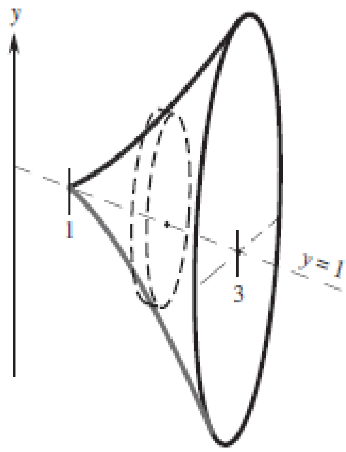



**Exemple**

Quel est le volume, $V_S$, du solide engendré par la rotation suivant la droite déquation $y = 1$ de la région du plan délimitée par la courbe d'équation $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$ ?

Tout d'abord déterminons la fonction de $x$ qui décrit les rayon des disques : pour $x \in [1;3]$ nous avons $f_H(x) = x^2$ et $f_B(x) = 1$ donc $f(x) = x^2 - 1$.

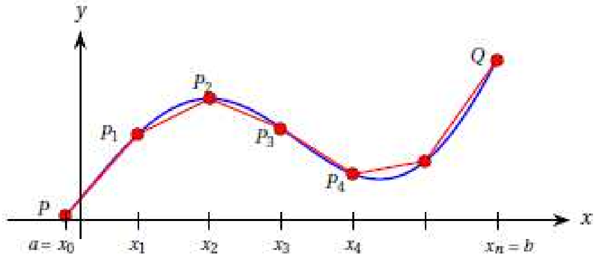
$$\begin{aligned} V_S &= \int_1^3 \pi(f(x))^2\,dx = \int_1^3 \pi(x^2-1)^2\,dx \\ &= \int_1^3 \pi(x^4 - x^2 + 1)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2s^3}{3} + x\right]_1^3 = \frac{496\pi}{15} \end{aligned}$$



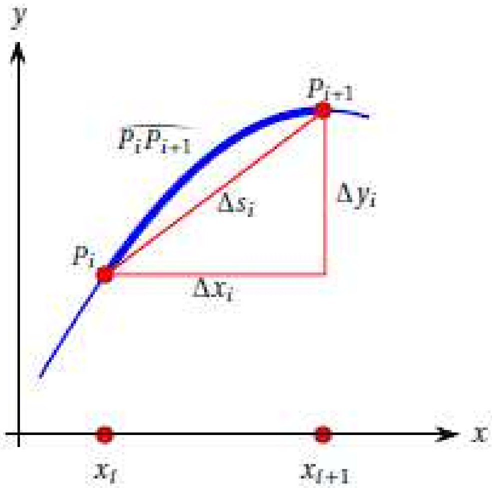

### 5.2.3 Longueurs d'arc

Comme pour les calculs d'aire et de volume des sections précédentes, les formules donnant la longueur d'arc proviennent elles aussi d'un processus de passage à la limite. La courbe peut être considérée comme une juxtaposition de petits segments rectilignes. La somme des longueurs des petits segments fournit alors une approximation de la longueur de la courbe. L'approximation est d'autant meilleure que le nombre de segments est grand.

Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a;b]$. La courbe $y = f(x)$ est alors une courbe lisse sur $[a;b]$ (c'est-à-dire continue et dérivable, donc ne changeant pas brusquement de direction). Soit $P = (a;c)$ et $Q = (b;d)$ deux points de cette courbe et soit $\widehat{PQ}$ l'arc (la portion de courbe) qui les relie. Pour un partage de $[a;b]$ en $n$ sous-intervalles de largeur égale $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ on obtient la figure suivante, où chaque portion de l'arc est approximée par un segment $[P_iP_{i+1}]$.

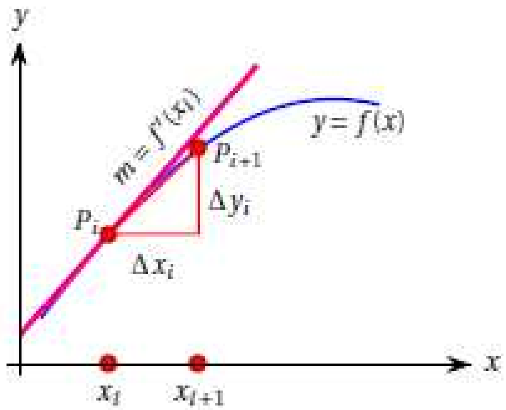



Considérons le triangle rectangle obtenu dans le $i^e$ sous-intervalle et exprimons la longueur de son hypoténuse $\Delta s_i$ en fonction de $\Delta x_i$ et $\Delta y_i$ grâce au théorème de Pythagore.




$$\begin{aligned}\Delta s_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \times \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \times \Delta x_i \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \times \Delta x_i \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \times \Delta x_i\end{aligned}$$

Rappelons que, lorsque le nombre $n$ de sous-intervalles tend vers l'infini, cela entraîne que la largeur $\Delta x_i$ de ceux-ci tend vers 0 et que la pente du segment $[P_iP_{i+1}]$ tend vers la pente de la tangente à la courbe en $P_i$. Or cette pente est donnée par la dérivée $f'(x_i)$.




$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x_i)$$

Ainsi, en utilisant le processus d'intégration pour ce partage de $[a;b]$ en $n$ sous-intervalles, on obtient pour la longueur $L$ de l'arc $\widehat{PQ}$ la formule suivante.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \times \Delta x_i \right) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

**Théorème 8.**

Si $f$ est une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ alors la longueur de la courbe déquation $y = f(x)$ pour $a \leq x \leq b$ est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

**Remarque**

*Si $g$ est une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[c;d]$ alors la longueur de la courbe déquation $x = g(y)$ pour $c \leq y \leq d$ est donnée par*

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$