Introduction à la statique des fluides

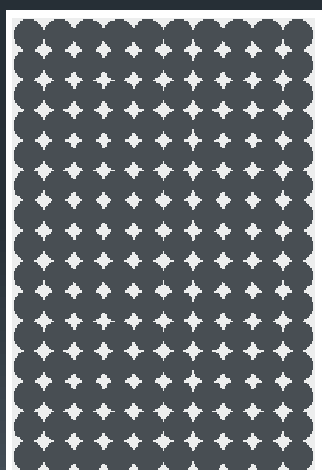
Sommaire :

- Définitions générales
- Notion de pression
- Principe fondamental de la statique des fluides
- Théorème de Pascal
- Poussée d’Archimède
- Bilan des forces en statique

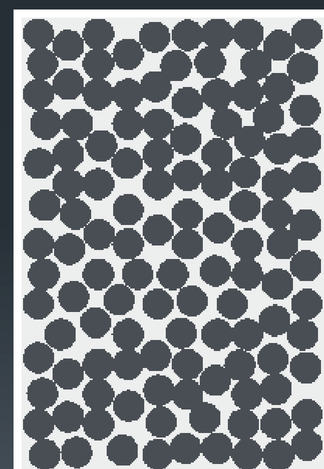
Définitions générales

Avant de se lancer dans des équations et calculs, il faut rappeler certaines définitions générales :

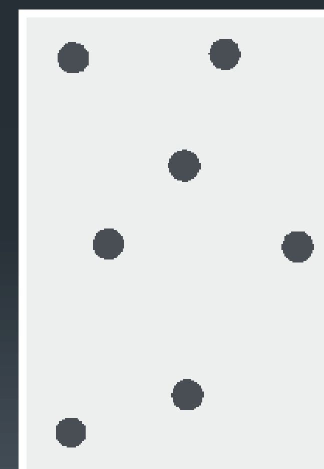
Solides : Ont une forme propre
Fluides : Pas de forme propre
Compressibilité : Différence entre liquide et gaz (on fait l’approximation que les liquides sont incompressibles).



Solide



Liquide



Gaz

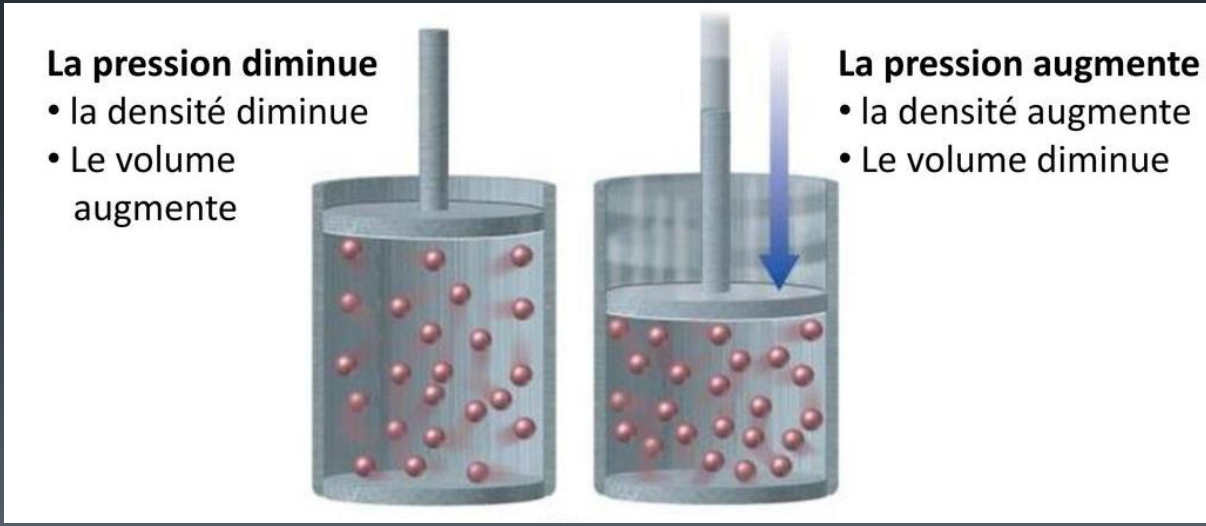
Définitions générales

- Masse volumique : $\rho = m / V$ en kg.m-3
- Poids volumique : $\overline{w} = P / V = mg / V = \rho * g$ en N.m $^{-3}$
- Densité : d = ρ / ρ_0 avec ρ_0 la masse volumique de l’eau

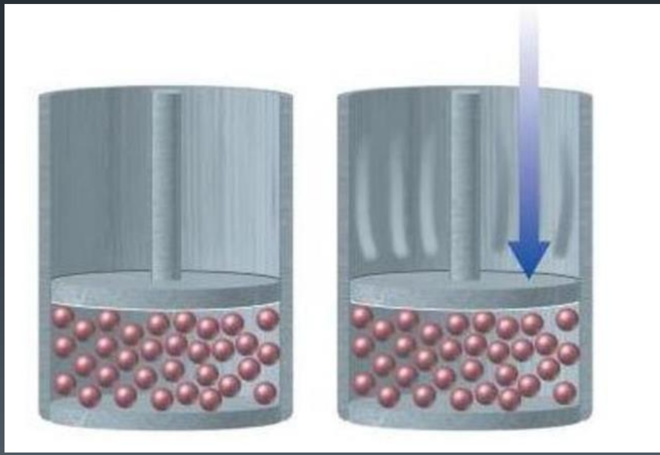
Définitions générales

Compressibilité : Différence entre liquide et gaz

- Un fluide compressible est un fluide dont le volume peut varier selon les forces extérieures qui s'exercent sur lui. Les gaz sont des fluides compressibles
- Un fluide incompressible est un fluide dont le volume ne peut presque pas varier. Sa masse volumique est donc considérée comme constante. Pour l'étude on considère que les liquides sont des fluides incompressibles.



Cas des gaz



Cas des liquides

Définitions générales

Exemple :

Fluide	Masse volumique ρ (kg/m^3)	Type de fluide
Benzène	$0,880.\ 10^3$	Incompressible
Chloroforme	$1,489.\ 10^3$	
Eau	10^3	
Huile d'olive	$0,918.\ 10^3$	
Mercure	$13,546.\ 10^3$	
Air	$0,001205.\ 10^3$	compressible[1]
Hydrogène	$0,000085.\ 10^3$	
Méthane	$0,000717.\ 10^3$	

Remarque : en réalité tous les fluides ont un degré de compressibilité. Mais on fait l'approximation que certains sont incompressibles.

Notion de pression

La pression est une grandeur physique naturelle qui est définie comme étant l’intensité de la force divisée par unité de surface.

A retenir :

- Les forces de pression s’exercent toujours perpendiculairement aux surfaces sur lesquelles elles agissent.
- La pression en un point quelconque d’un fluide est la même dans toutes les directions : verticale, horizontale ou inclinée (quel que soit l’angle d’inclinaison).

Les effets de la pression peuvent être observés avec des expériences très simples :

Verre d’eau retourné - Eau qui monte dans le verre
Bouteille qui se vide plus rapidement - Expérience de Magdeburg

Notion de pression

Les unités usuelles de la pression :

Pascal (Pa) : unité du système international (hPa utilisés en météorologie).
Bar : 1 bar = 10^5 Pa, unité la plus utilisée dans la vie courante.

Conversions de pression :

- 1 bar = 10 N / cm^2
- 1 Pa = 1 N / m^2
- 1 MPa= 1 N / mm^2 = 10^6 Pa
- 1 bar = 10^5 Pa
- 1 atm = 101 325 Pa

Notion de pression

Lorsqu'on mesure la pression, il existe une différence entre ce qu'on appelle la pression relative et la pression absolue :

- La pression relative est la différence entre la pression du point de mesure et P_{atm}
- La pression absolue est la pression totale en un point (prise en compte de P_{atm})
- Enfin, la pression différentielle est la différence de pression entre 2 points (pas de notion de pression de référence).

Remarque :
La pression atmosphérique est mesurée grâce à un baromètre.
Pour la pression relative (pour un fluide au sein d'un contenant), on utilisera le manomètre.

Notion de pression

Exemple :

On considère un plongeur à 15 m de profondeur sous l’eau.

- Quelle est la pression relative ?
- Quelle est la pression absolue ?

Notion de pression

Exemple :
On considère un plongeur à 15 m de profondeur sous l’eau.

- Quelle est la pression relative ?
- Quelle est la pression absolue ?

Réponse :

- La pression au niveau de la mer est de 1 bar
- La surpression due à l’eau est de 1,5 bar

Ce qui nous donne :
P relative = 1,5 bar P absolue = P_0 + P relative = 2,5 bar

Remarque :
Dans l’eau, on considère qu’on augmente d’un bar tous les dix mètres de profondeur.

Série d’exercices 1 :

Exercice 1 :
Déterminer le poids volumique d’un mélange

Exercice 2 :
Calcul du poids et du volume occupé par une masse donnée

Exercice 3 :
Calcul des variations de volume et de l’indice de compressibilité

Principe fondamental de la statique des fluides

Comme pour les solides, l'étude mécanique des fluides peut se faire en statique ou en dynamique.
On commence par le cas statique car c'est le plus simple.

L'hydrostatique est donc le cas où le fluide **est au repos**. Elle permet l'étude des corps flottants (bateau à l'arrêt, iceberg …), des barrages …

Principe fondamental de la statique des fluides

On considère la masse volumique et la température constantes dans tout le fluide, les forces extérieures se réduisent aux seules forces de pesanteur.

On a l'équation suivante :

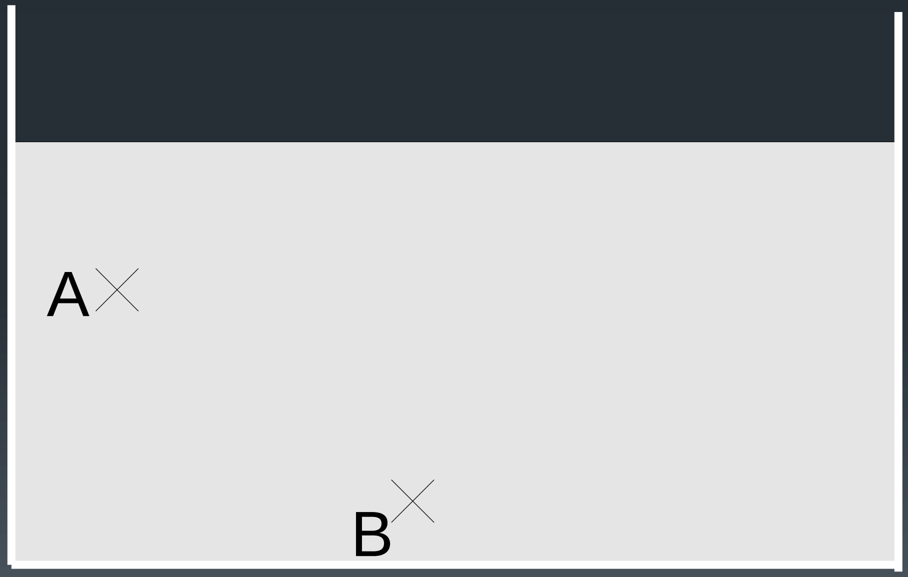
$$\boxed{\mathbf{P + \rho\, g\, z = constante}}$$

P : Pression en un point au sein du fluide (en Pascal)
ρ : masse volumique du fluide en Kg/m^3
g : accélération de pesanteur ($9,81\ m/s^2$)
Z : Altitude en mètre du point où l'on mesure.

Principe fondamental de la statique des fluides

C’est-à-dire que si on prend deux points A et B quelconques dans un fluide, on obtiendra l’équation suivante :

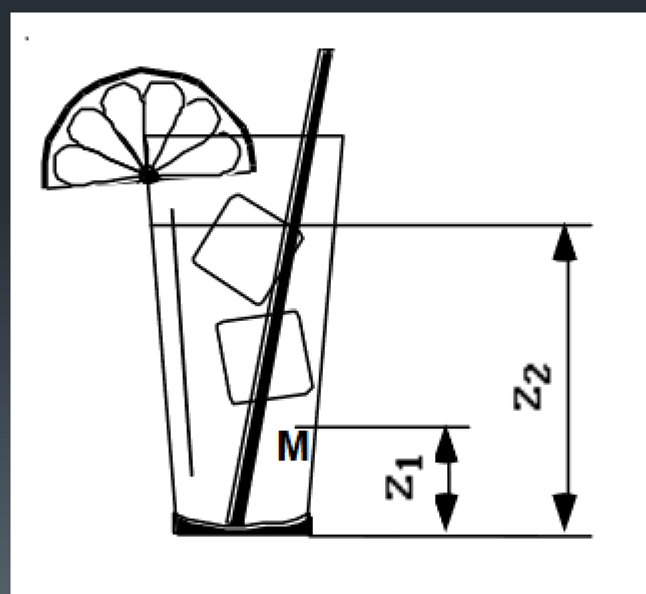
$$\boxed{P_A + \rho\, g\, z_A = P_B + \rho\, g\, z_B}$$



Principe fondamental de la statique des fluides

Exemple :

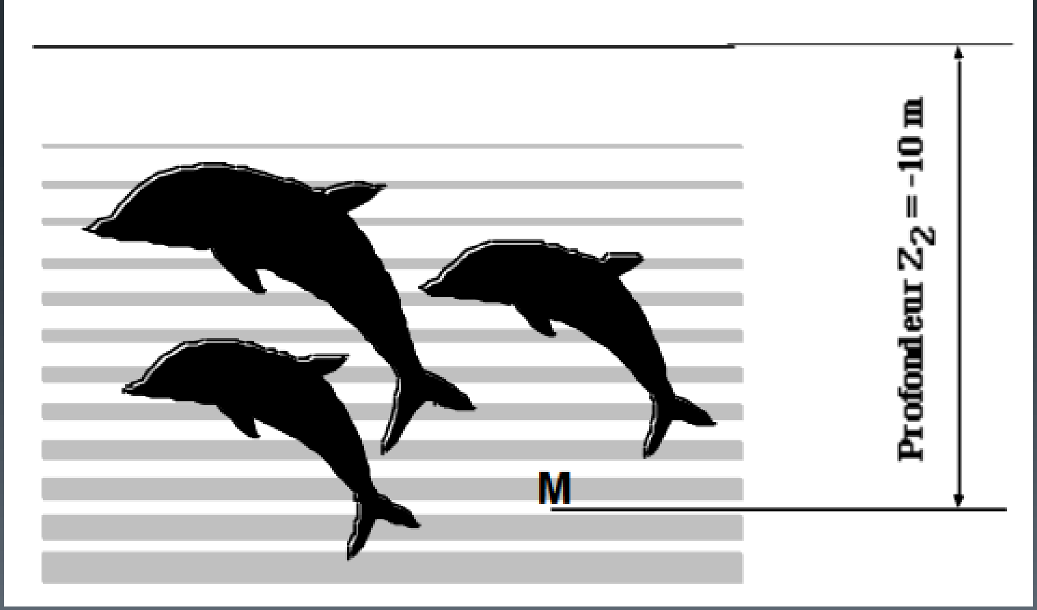
La surface libre (à la cote Z2) du fluide est soumise à la pression atmosphérique(1 atm). Le fluide situé au dessus du point M (à la cote Z1) "pèse" sur le point M. Par conséquent la pression qui règne en M est supérieure à la pression atmosphérique.



Principe fondamental de la statique des fluides

Application :

Considérons un banc de dauphins qui se promènent à une profondeur de 10 mètres.
En utilisant le théorème fondamental de l'hydrostatique, calculer la pression à 10 mètres de profondeur.
Quelle est la pression à 20 m ? À 30 m ? Quelle conclusion peut on tirer ?



Principe fondamental de la statique des fluides

A la surface (libre) de la mer, la pression est de 1 atmosphère. L'altitude est de 0 m. Nous considérerons que la masse volumique de la mer est d'environ ρ_{mer} = 1 000 kg/m3.

En un point A de la surface libre de la mer, on peut appliquer l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$P + \rho.g.z = Cte$$

On obtient ainsi, l'équation suivante:

$$P_A + \rho_{mer} .g.Z_A = Cte$$

avec (P_A = 1 atm, ZA = 0, ρ_{mer} = 1 000 kg/m3, g = 9,81 m/s^2)

- Appliquons au point M, cette même équation. Il vient alors:

$$P_M + \rho_{mer} .g.Z_M = Cte.$$

Dans cette équation, la pression P_M est inconnue. En regroupant ces deux équations, nous obtenons alors:

$$P_A + \rho_{mer} .g.Z_A = P_M + \rho_{mer} .g.Z_M$$

Principe fondamental de la statique des fluides

d'où :

$$P_M = P_A + \rho_{mer} .g.(Z_A - Z_M)$$

L'application numérique donne :

$$P_M = 101\ 325 + 1000 \text{ x } 9{,}81 \text{ x } [0 - (-10)]$$

$$P_M = 199\ 425 \text{ Pa}$$

$$P_M = 1{,}99 \text{ bar}$$

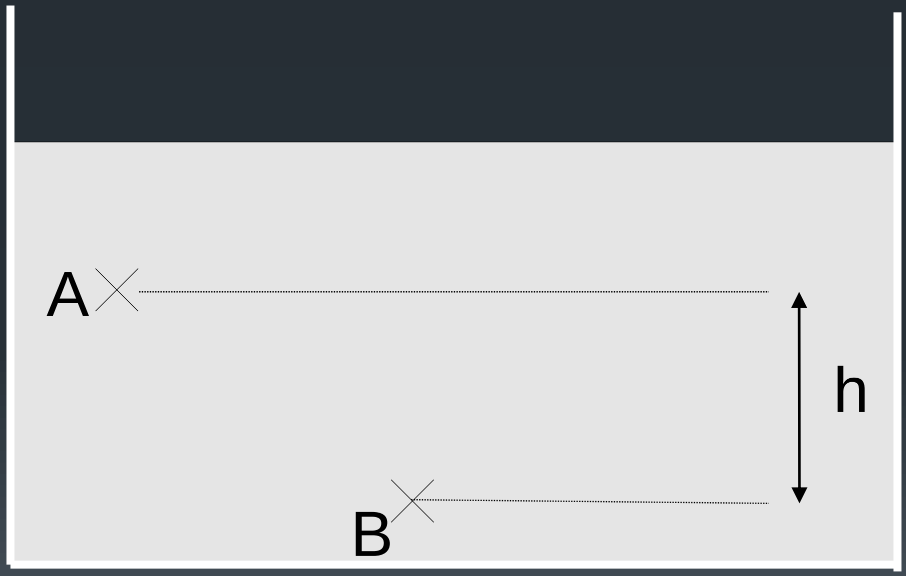
Nous pouvons donc conclure, qu'à chaque fois que nous plongeons de 10 mètres sous la mer, la pression augmente d‘environ un bar.

Principe fondamental de la statique des fluides

On peut donc obtenir l'équation suivante :

$$P_B - P_A = \Delta P = \rho \, g \, h = \rho \, g \, (Z_A - Z_B)$$

L'axe Oz positif est orienté vers le haut



Ceci confirme que le point le plus bas dans un fluide est donc celui où la pression est la plus élevée. De plus, tous les points qui sont à la même altitude sont à la même pression

Principe fondamental de la statique des fluides

Les conséquences qui découlent de l'équation fondamentale de l'hydrostatique, sont nombreuses et importantes:

- les surfaces **isobares** (surfaces où la pression reste identique) dans un fluide homogène soumis à l'action de pesanteur sont des plans, car P = Cte entraîne Z = Cte

- la surface de séparation de deux fluides de densité différente et non miscibles est un plan horizontal

- la différence de pression entre deux points quelconques A et B, pris à l'intérieur du fluide, ne dépend que de la distance verticale entre les deux points.

Principe de Pascal

Le théorème fondamental de l’hydrostatique découle du principe de Pascal dont l’énoncé est le suivant :

Enoncé :

Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, la pression est la même en tout point du liquide et cela aussi longtemps que ces points sont à la même profondeur.

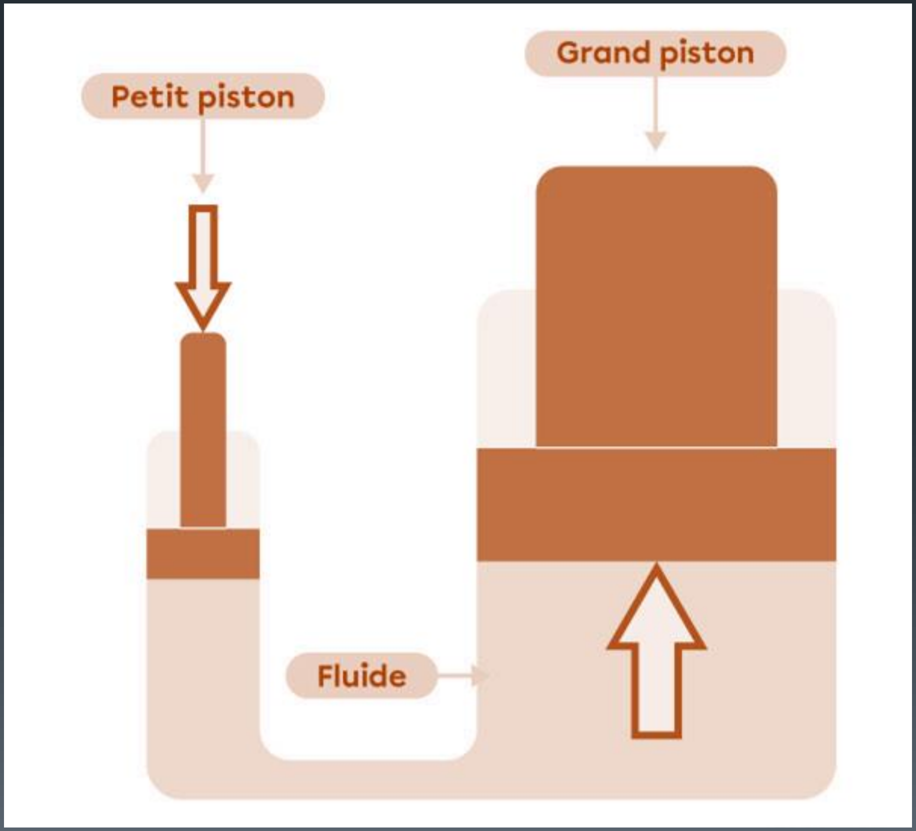
Principe de Pascal

Formulé différemment , cela nous donne :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

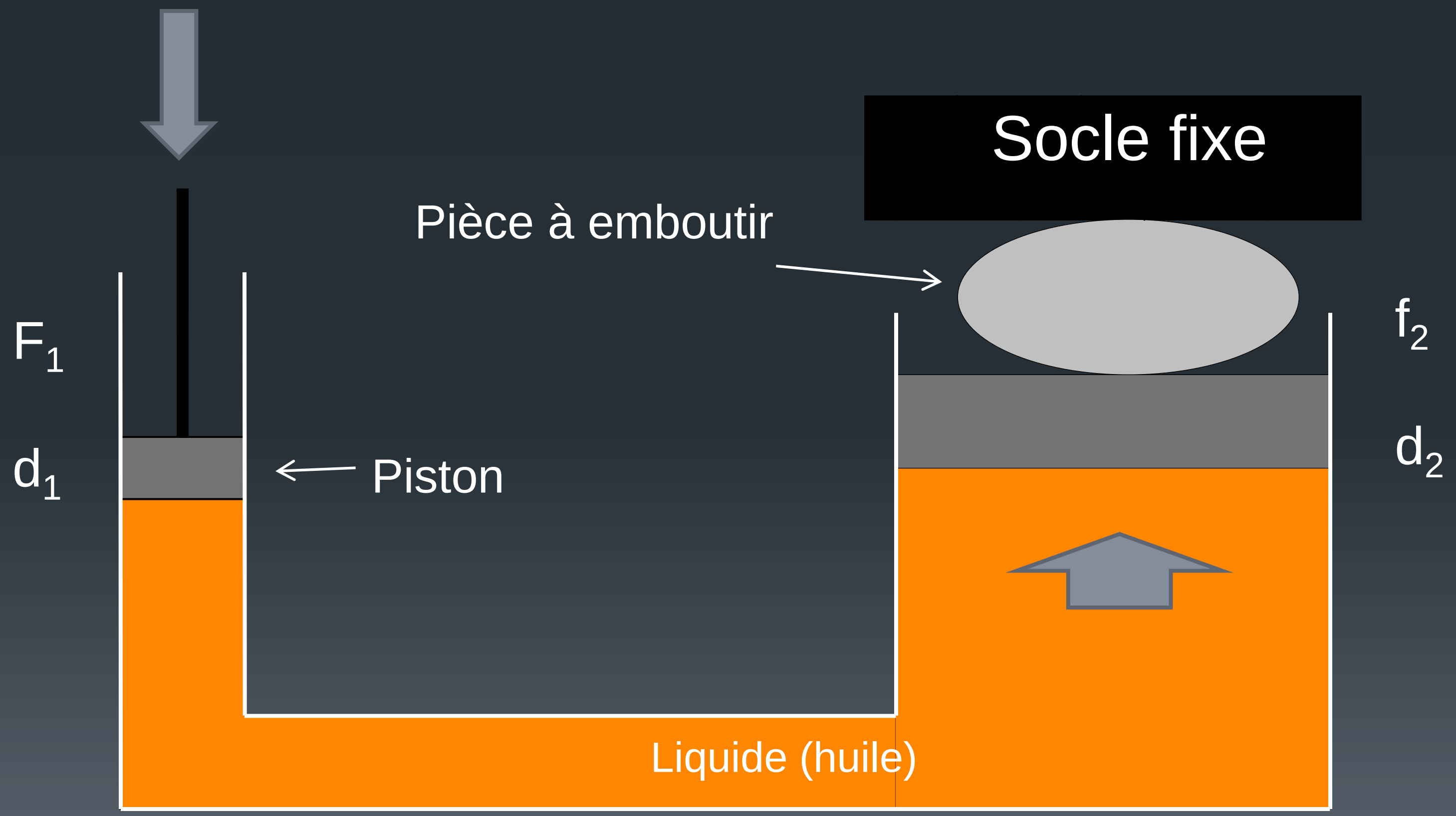
Principe de Pascal

Ce principe est celui utilisé par les vérins hydrauliques ayant deux pistons de tailles différentes et remplis d'un fluide incompressible comme l'huile.



Principe de Pascal

Ce principe est celui utilisé par les vérins hydrauliques ayant deux pistons de tailles différentes et remplis d'un fluide incompressible comme l'huile.



Principe de Pascal

Exemple :

Le petit piston d’un vérin a une superficie de 0,002 m², alors que le grand piston a une superficie de 0,010 m².

Si on applique une force de 100 N sur le petit piston, quelle force sera générée par le grand piston?

Principe de Pascal

Petit piston : Aire1=0,002 m^2 F1=100 N

Grand piston : Aire2=0,010 m^2 F2=?

Comme P1=P2 et P = F / A, on peut dire que F1 / Aire1=F2 / Aire2.

F1 / Aire1 = F2 / Aire2 ⇒ F2 = F1×A2 / A1

F2=100 N×0,010 m^2 / 0,002 m^2

F2=500 N

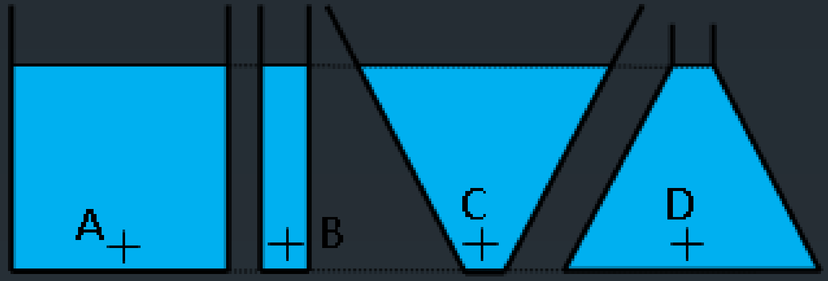
La force générée par le grand piston est de 500 N.

Cette force est effectivement plus grande que celle appliquée sur le petit piston (100 N).

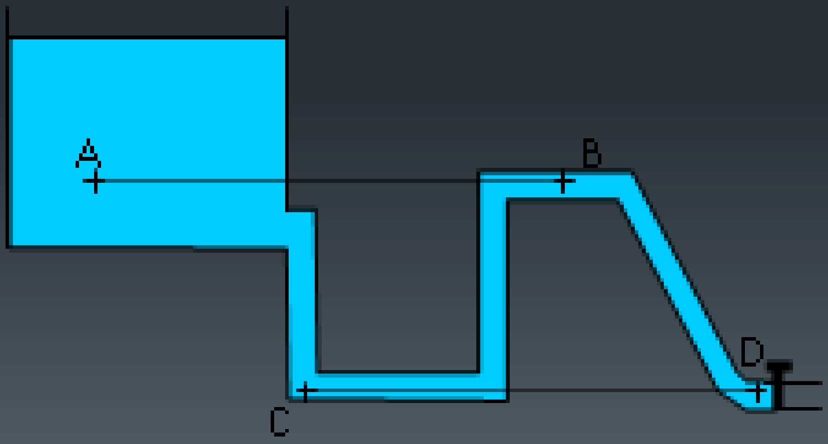
Principe fondamental de la statique des fluides

pression identique pour deux points de même altitude

Le volume d'eau au dessus des points n'est pas le même, pourtant la hauteur d'eau est identique.



Le point B a moins d'eau au dessus de lui et pourtant il est à la même pression que le point A…

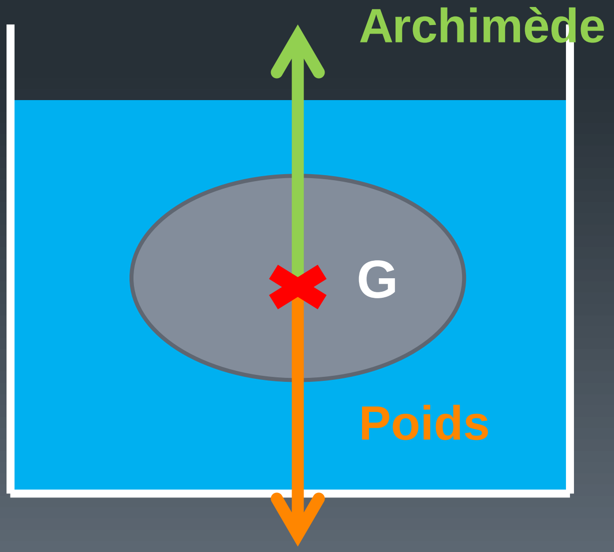


Poussée d’Archimède

Un autre phénomène important en mécanique des fluides est la poussée d’Archimède. C’est ce phénomène qui explique la flottaison des bateaux et des icebergs par exemple.

L’énoncé est le suivant :

Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.



$$P_{archimède} = \rho_{\,fluide} * V_{immergé} * g$$

Série d’exercices 2 :

Exercice 1 :
Déterminer la force exercée par un piston

Exercice 2 :
Calcul de la pression en différents points d’un réservoir à l’aide de tubes piézométriques en utilisant la relation fondamentale de l’hydrostique

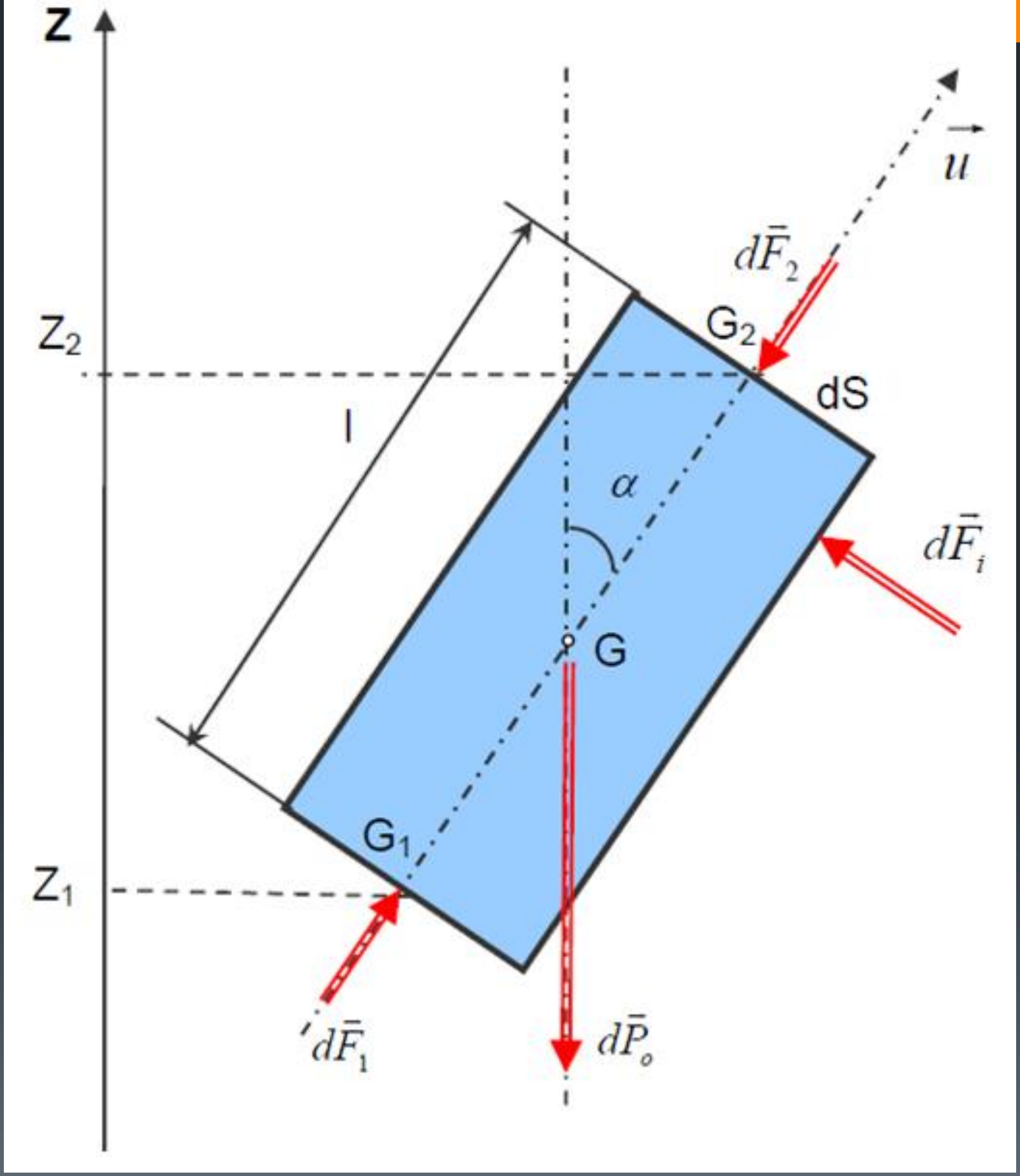
Exercice 3 :
Calcul de la flottaison d’un iceberg

Bilan des forces en hydrostatique

On considère le schéma ci-dessous :

Le solide en bleu est soumis à quatre forces :

- Son poids propre
- L'action de F_1 sur la paroi inférieure
- L'action de F_2 sur la paroi supérieure
- L'action des forces latérales notées F_i



Bilan des forces en statique

Bilan des AM :

-Poids $\overrightarrow{dP_o} = -\varpi \; l \; dS \; \vec{Z}$

-Pression sur S1

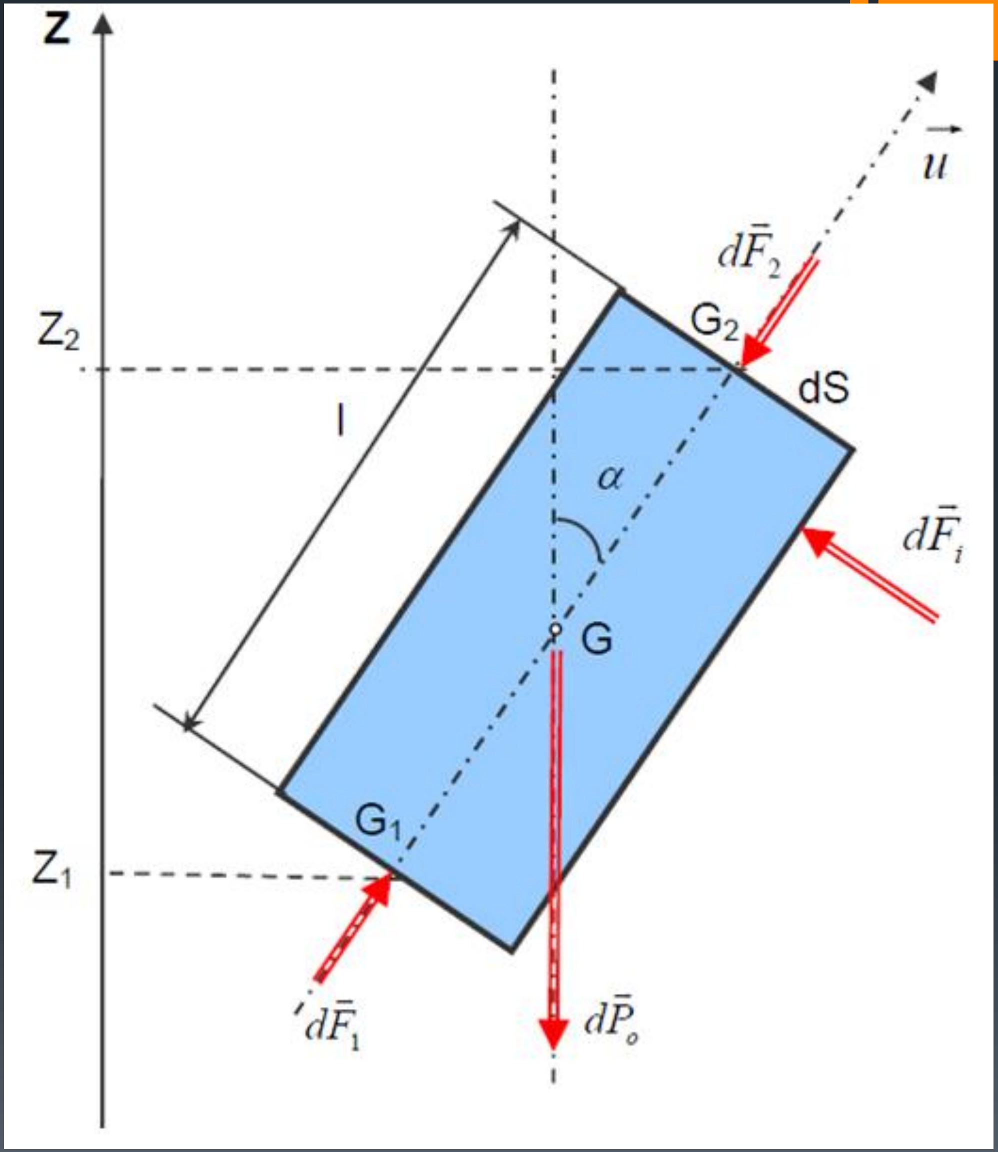
$$\overrightarrow{dF_1} = -P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$$

-Pression sur S2

$$\overrightarrow{dF_2} = -P_2.dS.\vec{u}$$

-Pression latérale

$$\Sigma \overrightarrow{dF_i}$$



Bilan des forces en statique

Bilan des forces en hydrostatique

Équilibre :

$$\overrightarrow{dP_o} + \Sigma\overrightarrow{dF_i} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0}$$

Projection sur u :

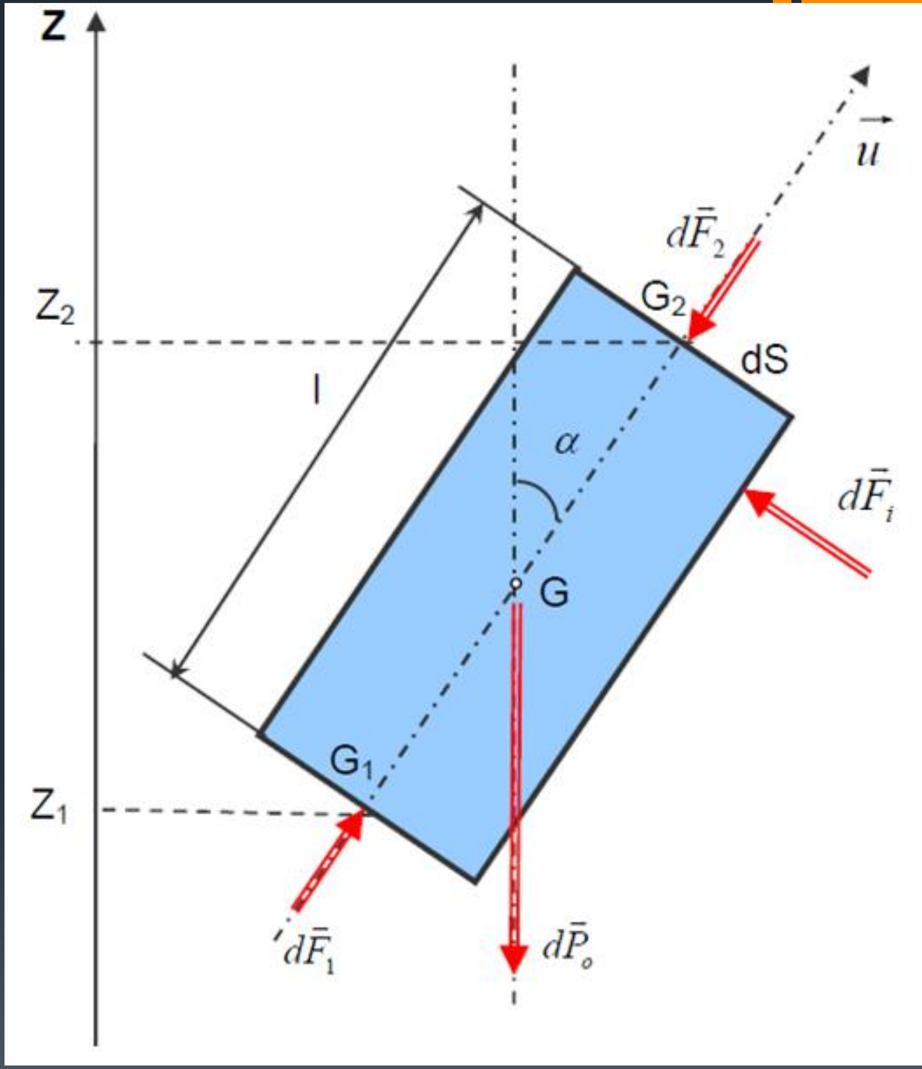
$$-\varpi.l.dS.\cos\alpha + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

On sait que :

$$l \cdot \cos\alpha = Z_2 - Z_1$$

On obtient ainsi l'équation du différentiel de pression :

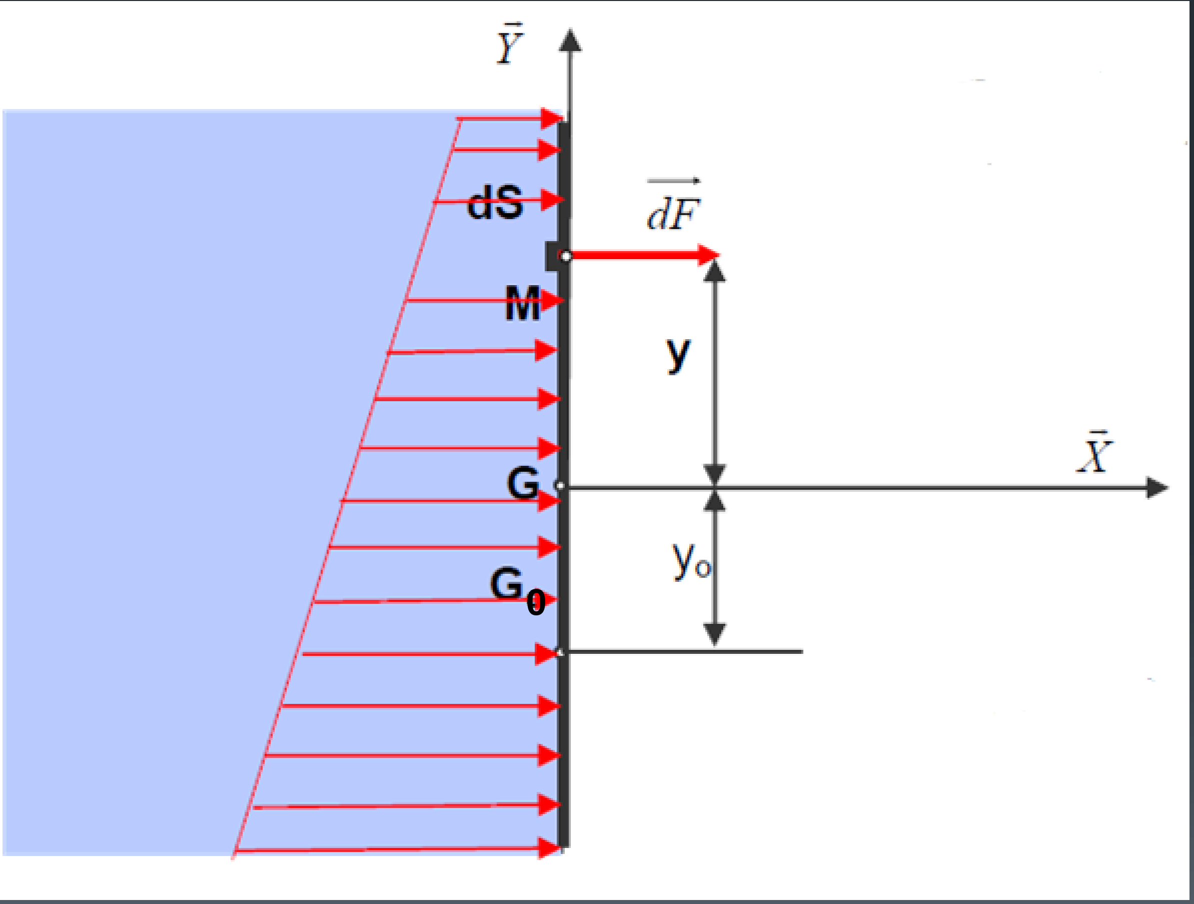
$$\boxed{P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)}$$



Bilan des forces en statique

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale:

- M est un point quelconque de la paroi verticale
- G est le centre de gravité de la paroi
- G_0 est le centre d'application de la force de poussée sur la paroi



$$P_M - P_G = \varpi.(Y_G - Y_M)$$

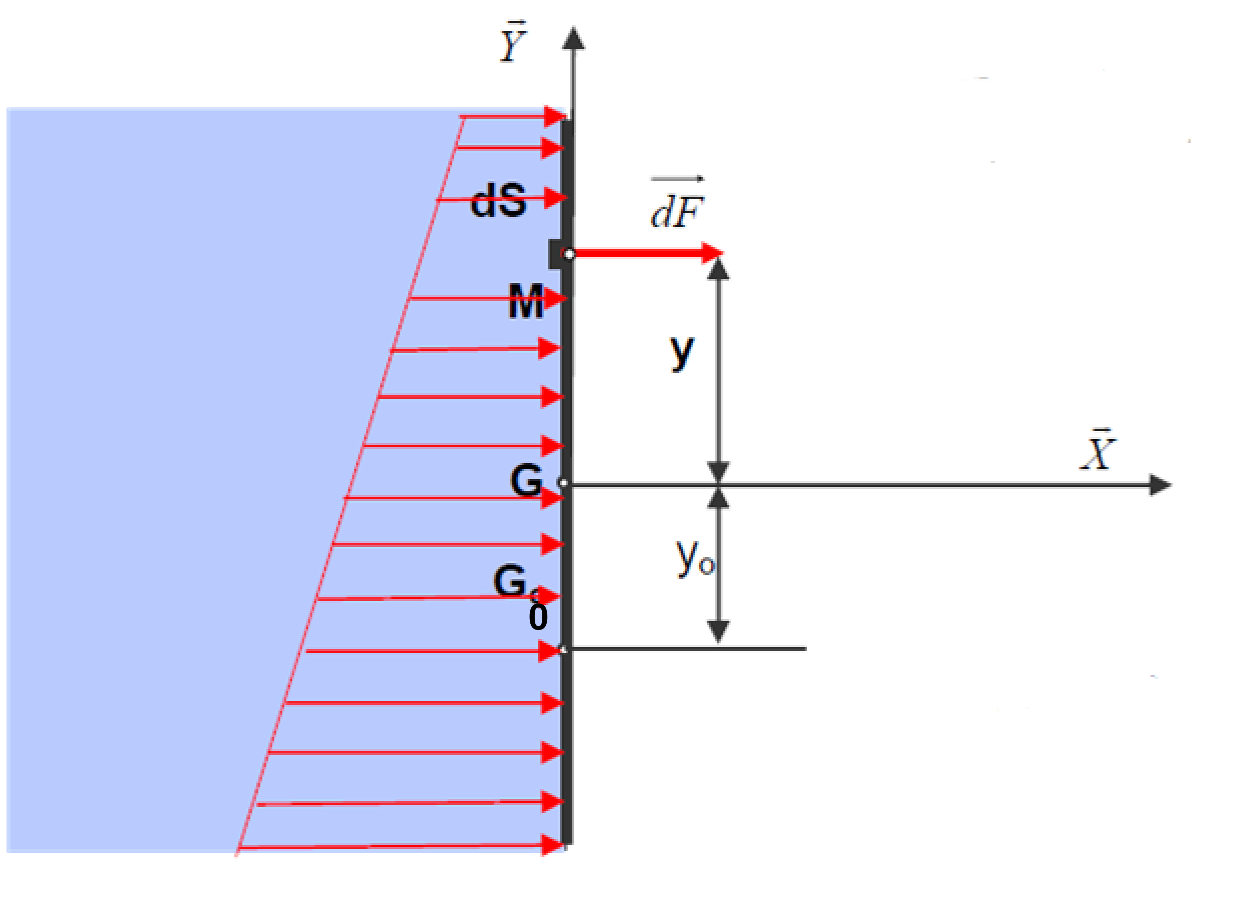
$$P_M = P_G - \varpi.y$$

en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

$$\left\{\tau_{poussée}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \overrightarrow{M_G} = \int_{s} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{array} \right\}_G$$

Bilan des forces en statique

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale



Résultante :

$$\vec{R} = \int_{(S)} (P_G - \varpi . y).dS.\vec{X}$$

$$\vec{R} = \left[P_G . \int_{(S)} dS - \varpi . \int_{(S)} y.dS \right] . \vec{X}$$

y_G est égal à 0 sur le repère

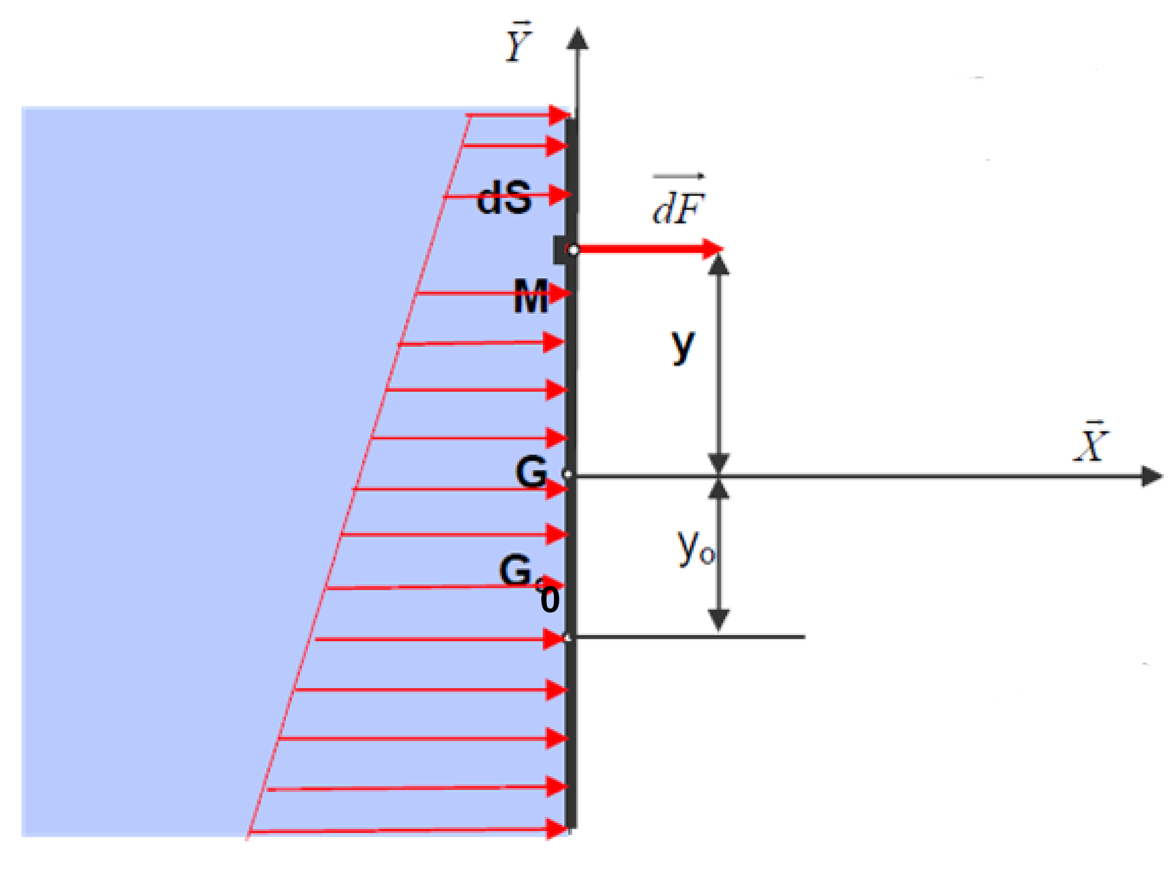
$$\int_{(s)} y.dS = y_G.S = 0$$

Moment statique de S/Gz

$$\boxed{\vec{R} = P_G.S.\vec{X}}$$

Bilan des forces en statique

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale



Moment au point G:

$$\overrightarrow{GM} = y.\vec{Y}$$

$$\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$$

$$\overrightarrow{M_G} = \int_{(S)} \left[y.\vec{Y} \wedge (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X} \right]$$

$$\overrightarrow{M_G} = \left[P_G.\int_{(S)} y.dS - \varpi.\int_{(S)} y^2.dS \right].(-\vec{Z})$$

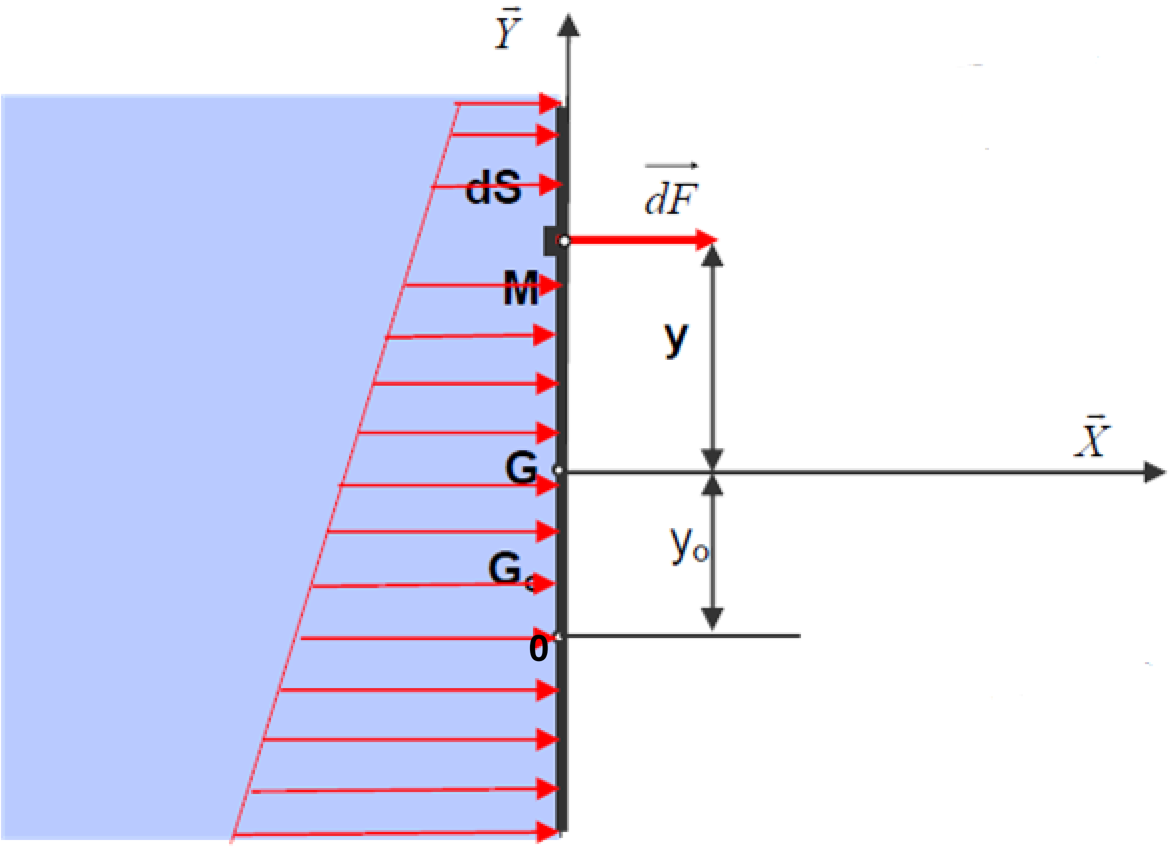
Moment statique de S/Gz $\int_{(S)} y.dS = y_G.S = 0$

Moment quadratique de S/Gz $\int_{(S)} y^2.dS = I_{(G,\vec{Z})}$

$$\boxed{\overrightarrow{M_G} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}}$$

Bilan des forces en statique

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale



$$\left\{\tau_{poussee}\right\} = \left\{\begin{matrix} P_G.S.\overrightarrow{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\overrightarrow{Z} \end{matrix}\right\}_G$$

Le centre de poussée correspond au point G_0 où le moment est nul

$$\overrightarrow{M_{G_0}} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GG_0} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_G}$$

$$y_0.\vec{Y} \wedge P_G.S.\vec{X} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$$

$$\boxed{y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}}$$

Go toujours en dessous de G