1 Loi Binomiale

Exercice 1

1. On lance un dé bien équilibré 3 fois successivement. Le résultat de chaque lancer est indépendant des précédents.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a obtenu le chiffre 6 sur ces 3 lancers.

   Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

2. On lance maintenant 4 fois successivement ce même dé. Compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$					

3. On lance maintenant 5 fois successivement ce même dé. Compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

Exercice 2

On lance un dé cubique équilibré 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement S : « obtenir un six » est réalisé.

1. Dresser un arbre pondéré et déterminer la loi de probabilité de X.
2. Mêmes questions si on lance cette fois 4 fois de suite le dé.
3. Mêmes questions si on lance cette fois 5 fois de suite le dé.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Donner le cas échéant les valeurs des paramètres de la loi binomiale associée.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer non pipés, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.
4. Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte au total 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses.

   On cueille successivement et au hasard 3 fleurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.

Exercice 4

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

Exercice 5

Des études statistiques montrent que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 0,51. On choisit au hasard une famille de quatre enfants où les naissances sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons.

1. Justifier que cette situation peut-être modélisée par une loi de binomiale.
2. Calculer la probabilité que cette famille compte au moins un garçon.

Exercice 6

Une machine produit en moyenne 2 % de pièces défectueuses. On prélève 50 pièces au hasard.
Le nombre de pièces dans le stock est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses.
Calculer la probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ou 4 pièces défectueuses.

Exercice 7

Statistiquement on observe que 2 % des personnes sont gauchères.

Calculer la probabilité que sur 35 personnes, il y ait plus de trois personnes gauchères.

Exercice 8

Une entreprise dispose d'un parc informatique composé de 50 ordinateurs neufs. Chaque ordinateur est garanti un an, période pendant laquelle la probabilité qu'il tombe en panne est de $0,1$; la panne d'un ordinateur n'affectant pas les autres ordinateurs du parc.

Quelle est la probabilité que moins de 3 appareils tombent en panne durant l'année ?

Exercice 9

La probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est de 0,005. Un train transporte 150 voyageurs. On admet que ces voyageurs se comportent, vis-à-vis de leurs bagages, indépendamment les uns des autres. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) aucun voyageur n'a oublié ses bagages.

   b) cinq voyageurs au moins ont oublié leurs bagages.

Exercice 10

Un étudiant se rend à vélo à l'ICAM distant de $3km$. Il roule à une vitesse supposée constante de $15km.h^{-1}$. Sur le parcours, il rencontre cinq feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est de $0,7$ et la probabilité qu'il soit au rouge (ou à l'orange) est de $0,3$. Un feu vert ne ralentit pas le cycliste, un feu rouge lui fait perdre une minute.
On note X (resp. T) la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le nombre de feux rouges rencontrés par l'élève (resp. le temps en minutes mis par le cycliste pour faire son parcours).

1. a) Déterminer la loi suivie par X et exprimer T en fonction de X.

   b) Si l'élève part 13 minutes avant le début des cours, calculer la probabilité qu'il arrive en retard.

2. Donner l'espérance mathématique de T et en déduire la vitesse moyenne (en $km.h^{-1}$) du cycliste sur ce trajet.

Exercice 11

PARTIE A

La société Sun-NRJY fabrique des cellules photovoltaïques qu'elle assemble ensuite pour former des panneaux qui seront installés sur le toit de batiments pour produire de l'électricité.

Ces cellules, à base de silicium, sont très fines (environ 250μm) et très fragiles. On estime que 1,5 % des cellules fabriquées présenteront un défaut (fissure, casse, ...) et seront donc inutilisables.

À la sortie de la production, on forme des lots de 75 cellules. La production étant très importante on peut assimiler la constitution d'un lot de 75 cellules à 75 tirages indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 75 cellules le nombre de cellules inutilisables qu'il contient.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune cellule inutilisable ?

3. Un panneau est constitué de 72 cellules. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de cellules sans défaut dans un seul lot pour pouvoir fabriquer un panneau ?

PARTIE B

Les 72 cellules utilisées pour constituer un panneau sont ensuite raccordées entre elles (soudures) puis placées sous une vitre de protection et insérées dans un cadre en aluminium. Les panneaux ainsi fabriqués sont alors expédiés chez un installateur.

À la réception des panneaux, l'installateur constate que certains panneaux présentent des défauts qui peuvent être de deux types, des défauts électriques (cellules fissurées, soudures défectueuses, ...), des défauts de structure (cadre abimé, verre brisé, ...).

Une étude statistique a permis d'établir que 2 % des 500 panneaux reçus par l'installateur avaient un défaut électrique, que 1 % des panneaux avaient un défaut de structure et que parmi les panneaux présentant un défaut de structure, 40 % avaient aussi un défaut électrique. On choisit au hasard un panneau.

- On appelle E l'événement : « le panneau présente un défaut électrique ».
- On appelle S l'événement : « le panneau présente un défaut de structure ».

1. Construire un tableau des effectifs.
2. Quelle est la probabilité qu'un panneau parmi ceux livrés à l'installateur ne présente aucun défaut ?
3. Les événements E et S sont-ils indépendants ? Expliquer.

Exercice 12

Une entreprise conçoit des composants électroniques pour l'industrie automobile.

A. Probabilités conditionnelles

L'entreprise dispose de deux sites de production : un premier site désigné par « site A » et un second site désigné par « site B ». Ces deux sites produisent des transistors.

On admet que 80 % des transistors sont fabriqués sur le site A. On estime que 1 % des transistors fabriqués sur le site A sont défectueux, tandis que 3 % des transistors fabriqués sur le site B sont défectueux.

On prélève au hasard un transistor dans l'ensemble de la production de transistors de cette entreprise. Tous les transistors ont la même probabilité d'être prélevés.

On considère les événements suivants :

A : « le transistor prélevé provient du site A » ;

B : « le transistor prélevé provient du site B » ;

D : « le transistor prélevé est défectueux ».

1. Donner, à partir des informations figurant dans l'énoncé, les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$. (On rappelle que $P_A(D)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).
2. (a) Construire un arbre da probabilité ou un tableau correspondant à la situation.
   (b) Calculer $P(D)$.
3. Calculer la probabilité que le transistor prélevé provienne du site A sachant qu'il est défectueux.

B. Loi binomiale

Un constructeur automobile sous-traite à cette entreprise la fabrication des cartes d'acquisition GPS pour la navigation embarquée ce qui nécessite des transistors.

L'entreprise constitue à cet effet un stock important de transistors. On prélève au hasard dans ce stock 150 transistors pour vérification.

On note E l'événement : « un transistor prélevé au hasard dans le stock est défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0,014$. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélévement des 150 transistors à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui à tout prélévement de 150 transistors ainsi défini, associe le nombre de transistors défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice $P(X = 2)$.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un transistor défectueux parmi le prélèvement de 150 transistors.

2 Loi de Poisson

Exercice 13

On désigne par X la variable aléatoire qui, a tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique, entre 14 heures et 15 heures. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 6)$.
2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14 heures et 15 heures, il se présente au plus 6 skieurs.

Exercice 14 (Statistique descriptive et loi de Poisson)

Une entreprise de location de véhicules possède un grand nombre de véhicules de même type.

Elle s'intéresse d'une part au nombre de véhicules en panne par jour, d'autre part à la consommation moyenne de carburant par véhicule pour 100 km.

Pour étudier le nombre de véhicules en panne par jour, on a relevé chaque jour, pendant quarante jours ouvrables, le nombre de véhicules en panne. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Nombre de véhicules en panne	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours	2	5	8	9	8	6	2

1. Donner, à l'aide d'une calculatrice, la moyenne et l'écart type de cette série statistique.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour ouvrable d'une année fixée, associe le nombre de véhicules en panne constaté ce jour là. On suppose que la variable aléatoire X

   suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

   Calculer les probabilités suivantes :

   (a) $P(X = 1)$;

   (b) $P(X \leqslant 3)$.

Exercice 15

Une entreprise fabrique en grande quantité des blocs électroniques de lampes utilisées dans les cabines d'avions.

On prélève au hasard n blocs dans le stock pour vérification. On admet que la probabilité qu'un bloc prélevé au hasard dans le stock soit défectueux est $0,02$. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement de n blocs à un tirage avec remise de n blocs.

On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de n blocs dans ce stock associe le nombre de blocs défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.

2. On suppose dans cette question que $n = 360$ ce qui correspond au nombre de blocs nécessaires pour équiper un avion d'un type donné.

   (a) Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat.

   (b) Calculer, à l'aide de la calculatrice, $P(X = 7)$. Arrondir à 10^{-4}.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un bloc soit défectueux. Arrondir à 10^{-4}.

Exercice 16 (Loi binomiale et loi de Poisson)

Un fournisseur d'accés à Internet étudie les défaillances de son système de transmission par ADSL. Les données utilisateur sont transmises par trames de 53 octets. Dans une connexion, on prélève une trame au hasard. La connexion est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage au hasard et avec remise de 53 octets parmi l'ensemble des octets transmis lors de la connexion.

On suppose que la probabilité qu'un octet prélevé au hasard dans la connexion contienne une erreur est $0,03$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 53 octets ainsi défini, associe le nombre d'octets contenant une erreur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun octet ne contienne une erreur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus trois octets contiennent une erreur.
4. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.

   Justifier que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 1,59$.
5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre le $\lambda = 1,59$.

   Calculer, à l'aide de la calculatrice :

   (a) $P(Y = 0)$;

   (b) $P(Y \leqslant 3)$.

Exercice 17

Une usine fabrique en série des pompes de surface destinées à l'irrigation agricole.

Le cahier de charges demande que ces pompes aient un débit de 6 $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}$ avec une tolérance de $\pm 0,25\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

En sortie de chaîne de fabrication , une pompe peut présenter deux types de défauts indépendants : un défaut de débit et un défaut mécanique.

Une étude statistique permet d'estimer que 1 % des pompes fabriquées présente un défaut mécanique.

Les pompes sont conditionnées par caisses de cinquante.

On considère, pour l'étude, que la constitution d'une caisse peut être assimilée à un prélèvement au hasard et avec remise de cinquante pompes dans la production, très importante, de l'usine.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque caisse de cinquante pompes, associe le nombre de pompes présentant un défaut mécanique.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramères de cette loi.

2. (a) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne une pompe présentant un défaut mécanique. Arrondir le résultat au millième.

   (b) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes présentant un défaut mécanique. Arrondir le résultat au millième.

3. On décide d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.

   (a) Quelle valeur du paramètre λ choisit-on ? Justifier.

   (b) On note Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre μ En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'une caisse contienne au moins quatre pompes présentant un défaut mécanique. Arrondir le résultat au millième.