Sommaire

1 Loi à densité 1

2 Loi uniforme 2

3 Loi exponentielle 3

4 Loi normale 5

4.1 Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ 5

4.2 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ 7

4.3 Quelques intervalles remarquables 11

5 Approximation de Loi 13

6 Approfondissement 14

7 Extraits de BTS 17

1 Loi à densité

Exercice 1

Parmi les exemples, donner ceux que l'on peut modéliser à l'aide d'une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle et, le cas échéant, indiquer cet intervalle.

1. On étudie le temps d'attenteà l'accueil d'un standard téléphonique.
2. On lance un dé à 12 faces et on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 10, on perd 2 euros sinon. On étudie le gain obtenu.
3. En Europe, on estime qu'il y a 30% de personnes myopes. On choisit au hasard un groupe de 50 personnes au hasard. On étudie le nombre de personnes myopes dans ce groupe.
4. On étudie la taille des élèves d'un collège.
5. On étudie le temps avant qu'une voiture rouge passe à un carrefour.

Exercice 2

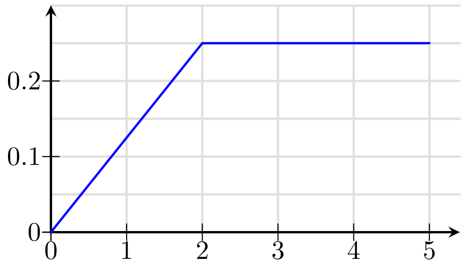
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x$.

1. Montrer que f est une fonction de densité sur $[0\ ;\ 2]$.
2. Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer les probabilités suivantes :

   (a) $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1,5)$ (b) $P(X \leqslant 1)$ (c) $P(X > 1)$ (d) $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0\ ;\ 5]$ est représentée ci-dessous :

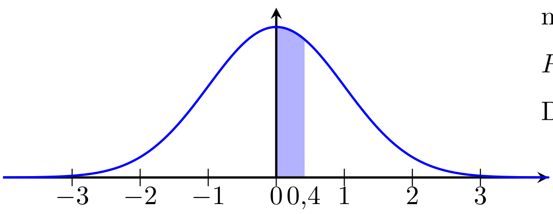


Déterminer :

1. $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$
2. $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$
3. $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$
4. $P(X < 3)$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est représentée ci-dessous :



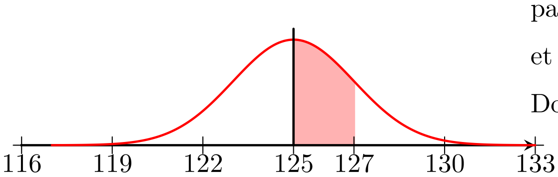
On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0,4) = 0,155$.

Donner une valeur approchée de :

1. $P(-0,4 \leqslant X \leqslant 0)$
2. $P(X > 0,4)$
3. $P(X \leqslant 0,4)$
4. $P(-0,4 \leqslant X \leqslant 0,4)$

Exercice 5

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0,341$.

Donner une valeur approchée de :

1. $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$
2. $P(X > 125)$
3. $P(X \leqslant 123)$
4. $P(127 \leqslant X)$

2 Loi uniforme

Exercice 6

On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[10\ ;\ 100]$.

1. Comment peut-on modéliser ce choix ?
2. Calculer les probabilités :

   (a) que ce nombre soit dans l'intervalle $[15\ ;\ 35]$;

   (b) que ce nombre soit égal à 42,5 ;

   (c) que ce nombre soit strictement supérieur à 52.5.

Exercice 7

On modélise le choix d'un nombre réel dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme.

1. Calculer les probabilités :
   (a) $P(X \in [1\ ;\ 5,5])$;
   (b) $P(2,7 \leqslant X < 6)$.
2. Que vaut l'espérance de X ?

Exercice 8

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{U}([0\ ;\ 20])$.

1. Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. Soit t un réel de l'intervalle $([0\ ;\ 20])$. Déterminer l'expression de $P(X \leqslant t)$ en fonction de t.

Exercice 9

Camille a dit à Solène qu'il passerait la voir chez elle pour récupérer un meuble entre 10h et 12h. N'ayant pas prévu d'heure précise, il peut arriver à tout instant.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire H donnant l'heure d'arrivée de Camille ?
2. Calculer la probabilité que Camille arrive :
   (a) avant 11h20
   (b) à 11h précise
   (c) entre 10h et 10h05
3. Camille n'est toujours pas arrivé à 10h40.
   Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 11h20 ?

Exercice 10

En rentrant de soirée, Léo sait qu'il va arriver dans la station de métro la plus proche entre 1h et 1h30. On fait l'hypothèse que son heure d'arrivée dans la station suit une loi uniforme. Depuis minuit il passe un métro toutes les 20 minutes dans cette station.

Quelle est la probabilité que Léo attende :

1. moins de 5 minutes ?
2. plus d'un quart d'heure ?

3 Loi exponentielle

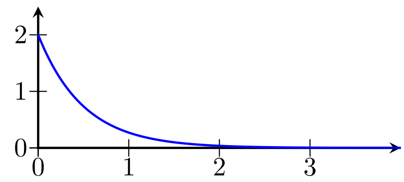
Exercice 11

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0.3. Calculer :

1. $P(X \in [0\ ;\ 2])$
2. $P(X \in [1\ ;\ +\infty[)$
3. $P(5 < X < 10)$
4. $P(X \in [5\ ;\ 10])$

Exercice 12

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\ ;\ 2)$ appartient à cette courbe.



1. Déterminer la valeur de λ.
2. L'égalité $P(X < 0,5) = P(X \geqslant 0,5)$ est-elle vraie ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X < t) = P(X \geqslant t)$.

Exercice 13

Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(Y > 30) = 0,2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère maintenant $\lambda = 0,05$. Calculer :

   (a) $P(Y \geqslant 15)$ (b) $P(Y \geqslant 5)$ (c) $E(Y)$

Exercice 14

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X) = 45$.

1. Déterminer la valeur de λ arrondie au millième.
2. A-t-on $P(X \geqslant 45) = 0,5$?

Exercice 15

Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes. On sait que la durée d'attente en minute peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Tessa vient retirer un colis. Calculer la probabilité :

   (a) que Tessa attende moins de 2 minutes ; (b) que Tessa attende plus de 5 minutes.

Exercice 16 (Durée de vie d'un composant)

Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Une étude statistique a permis d'établir que $P(T < 5) = 0,1$.

On arrondira tous les résultats au millième.

1. Déterminer la valeur de λ.

   Dans la suite, on prendra $\lambda = 0,02$.
2. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4. Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

Exercice 17 (Carbone 14)

La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0.5.

Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5730 ans.

1. Calculer le paramètre λ dans le cas du carbone 14.
2. Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :

   (a) avant 1000 ans ;

   (b) après 10000 ans.
3. Déterminer la valeur a telle que $P(D < a) = 0,95$ pour le carbone 14. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 18

Dans un lycée, les oscilloscopes utilisés en électronique ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0.383.

1. Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4}.

   Dans la suite on prendra $\lambda = 0,12$.
2. Interpréter et déterminer la probabilité $P(X \geqslant 3)$.
3. Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.

Exercice 19

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

1. comprise entre 50 et 100km ;
2. supérieure à 300km.

4 Loi normale

4.1 Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

Exercice 20

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. On arrondira au millième.

1. Déterminer les probabilités suivantes.

   (a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0,5)$ (b) $P(X \leqslant 0,5)$ (c) $P(X > -0,5)$

   (d) $P(-1 \leqslant X \leqslant 0,5)$ (e) $P(X \geqslant 1)$ (f) $P(X < -2)$

   Méthode.

   Pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(a \leqslant X)$, on peut calculer respectivement $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant a\right)$ ou $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice.

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

   (a) $P(X < t) = 0,8$ (b) $P(X > t) = 0,9$ (c) $P(0 \leqslant X \leqslant t) = 0,15$ (d) $P(-t < X < t) = 0,4$

Exercice 21

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. Donner l'arrondi au millième de :

1. $P\left(0 \leqslant X \leqslant 1,3\right)$ 2. $P\left(-2,1 \leqslant X \leqslant 0,4\right)$ 3. $P\left(X \leqslant 1,3\right)$ 4. $P\left(X \geqslant -0,3\right)$

Exercice 22

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et a est un réel tel que $P(Y < a) = 0,7$. Déterminer les probabilités suivantes.

1. $P(Y \leqslant a)$ 2. $P(Y > a)$ 3. $P(Y \geqslant -a)$ 4. $P(0 \leqslant Y \leqslant a)$ 5. $P(Y \leqslant -a)$

Exercice 23

T est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. Utiliser la courbe de densité de cette loi pour expliquer pourquoi :

1. $P\left(X \geqslant -0,3\right) = P\left(X \leqslant 0,3\right)$ 2. $P\left(X \leqslant -1,3\right) = 0,5 - P\left(0 \leqslant X \leqslant 1,3\right)$

Exercice 24

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Déterminer, en arrondissant au centième, h et t tels que :

1. $P(Z < 6t) = 0,99$
2. $P(-2h < Z < 2h)$=$0,95$

Exercice 25

Le prix moyen d'un ustensile de cuisine est égal à $6,8$ €. X est la variable aléatoire égale à l'écart entre ce prix moyen et les prix constatés dans l'ensemble des magasins de France. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Calculer $P\left(X \geqslant 1,2\right)$. Interpréter ce résultat.
2. Calculer $P\left(X \leqslant -0,7\right)$. Interpréter ce résultat.
3. À quelle fourchette de prix constatés correspond l'intervalle I tel que $P\left(X \in I\right) = 0,95$?

Exercice 26

La température moyenne au mois de mars sur l'ensemble du XX^e siècle était de $7°C$. On choisit au hasard un jour de mars du XX^e siècle. On peut considérer que l'écart entre la température moyenne de ce jour et la température moyenne d'un jour de mars du XX^e peut être modélisé par la loi normale centrée réduite.

1. Quelle est la probabilité que la température moyenne de ce jour ait été supérieure à $8°C$?
2. On considère qu'un jour de mars est exceptionnellement froid si la température moyenne est inférieure à $4°C$. Quelle est la probabilité que le jour choisi au hasard ait été exceptionnellement froid ?

Exercice 27

Une puce qui se trouve sur l'origine d'un axe gradué en décimètre se prépare à effectuer un saut en longueur vers un autre point de l'axe.

On suppose que l'abscisse du point où retombe la puce suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

On arrondira les résultats au millième.

1. Déterminer $P(-1 \leqslant X < 2)$.
2. Quelle est la probabilité que la puce retombe à son point de départ ?
3. Quelle est la probabilité que la puce parcourt plus de 1 dm ?
4. Un chat souhaite éviter que la puce ne retombe sur lui après son saut. À quelle distance doit-il se placer de la puce pour avoir 99% de chance de l'éviter ?

Exercice 28

Sigmund a vraiment du mal à gérer son argent ! La somme qu'il a sur son compte en banque (en milliers d'euros) est donnée par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

On donnera les résultats arrondis à 10^{-4} près.

1. Déterminer la probabilité que le compte de Sigmund soit à découvert.
2. Déterminer la probabilité que Sigmund :
   (a) ait entre 200 et 500 euros sur son compte ;
   (b) soit à découvert d'entre 100 et 600 euros.
3. S'il est à découvert, Sigmund reçoit un SMS de sa banque.

   Déterminer la probabilité qu'il soit à découvert de plus de 500 euros sachant qu'il a reçu un SMS.

4.2 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

Exercice 29

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(30;3)$.

Calculer : 1. $P(25 \leqslant X \leqslant 35)$ 2. $P(X \geqslant 32)$

Exercice 30

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(7;0,2)$.

Déterminer une valeur approchée de t au centième près telle que :

1. $P(X \leqslant t) = 0,672$
2. $P(X \geqslant t) = 0,873$

Exercice 31

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(2\ ;\ 3)$. Déterminer les probabilités suivantes :

   (a) $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$
   (b) $P(X < 2)$
   (c) $P(4 \geqslant X)$
   (d) $P(X < 1)$
   (e) $P(X \geqslant 3)$
   (f) $P(X > -2)$

2. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 4$.

   Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

   (a) $P(Y < t) = 0,2$
   (b) $P(Y \geqslant t) = 0,7$
   (c) $P(-t < Y - 10 < t) = 0,9$
   (d) $P(t \leqslant Y \leqslant 10) = 0,35$
   (e) $P(t \leqslant Y < 9) = 0,1$

Exercice 32

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(8\ ;\ 2)$.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au dix-millième.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

   (a) $P(6 \leqslant Z \leqslant 12)$
   (b) $P(Z > 9)$
   (c) $P(Z \leqslant 7,5)$

2. Déterminer dans chacun des cas suivants la valeur du réel t telle que :

   (a) $P(Z \leqslant t) = 0,3$
   (b) $P(Z \geqslant 2t) = 0,4$

Exercice 33

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(180;10,5)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

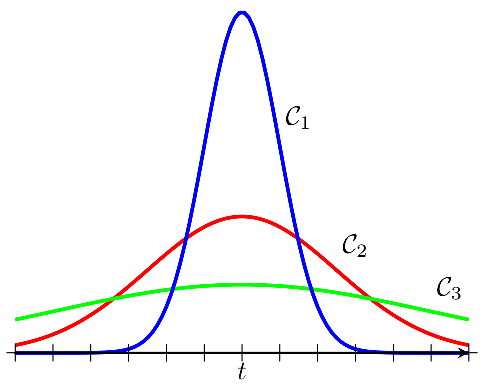
1. Déterminer les probabilités suivantes :

   $P(170 \leqslant X \leqslant 200)$; $P(X \leqslant 150)$; $P(X \geqslant 160)$; $P(X \geqslant 190)$.

2. Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = 0,875$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 34

On considère les courbes ci-dessous représentant les fonctions de densité de trois variables aléatoires X, Y et Z suivant les lois respectives $\mathcal{N}(6\ ;\ 2,5)$, $\mathcal{N}(6\ ;\ 5)$ et $\mathcal{N}(6\ ;\ 1)$.



1. Graphiquement, quelle est la valeur de t ?
2. Associer chacune des courbes à la variable aléatoire lui correspondant.

Exercice 35

On considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma)$ et a est un réel positif tel que $P(Y < \mu + a) = 0,8$.

Déterminer :

1. $P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu + a)$
2. $P(Y > \mu + a)$
3. $P(Y \leqslant \mu - a)$
   Utiliser la symétrie de la courbe
4. $P(\mu - a \leqslant Y \leqslant \mu + a)$

Exercice 36

Une étude effectuée sur un groupe de jeunes enfants a montré que l'âge d'apparition des premiers mots suit une loi normale d'espérance $12,1$ mois et d'écart-type $3,4$ mois.

Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans ce groupe ait prononcé ses premiers mots :

1. avant 10 mois ;
2. après 18 mois ;
3. entre 8 et 16 mois.

Exercice 37

Pour se rendre à son travail, Théophile a le choix entre prendre son vélo ou prendre un bus.

On suppose que le temps de trajet à vélo (en minutes) suit la loi normale de paramètres $\mu = 43$ et $\sigma = 3$ et que le temps de trajet en bus suit la loi normale de paramètres $\mu = 38$ et $\sigma = 15$.

1. Quel est le temps moyen de parcours avec chacun des moyens de transport ?
2. Théophile dispose de 45 minutes pour aller à son travail.
   Quel moyen de transport lui conseiller s'il ne souhaite pas arriver en retard ?
3. Quel moyen de transport lui conseiller au retour ?

Exercice 38

Un ascenseur peut supporter une charge de $1000kg$. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a une masse, en kg, qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 75kg$ et d'écart-type $\sigma = 16kg$, et que la somme des masses de n personnes dont la masse suit cette loi normale suit une loi normale de moyenne $n \times \mu$ et d'écart-type $\sigma\sqrt{n}$.

1. L'ascenseur peut-il supporter 9 personnes ?
2. L'ascenseur peut-il supporter 11 personnes ?
3. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6} ? Justifier.

Exercice 39

X suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et σ. On sait que $P(X \leqslant 11) = 0,8$.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 10}{\sigma}$?
2. Déterminer la valeur de t tel que $P(Z \leqslant t) = 0,8$.
3. En déduire la valeur de σ.

Exercice 40

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20; 120]$.
   (a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 20)$.
   (a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   (b) Montrer l'équivalence :
   $$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3$$
   (c) On définit la variable aléatoire X par $X = \dfrac{J - 120}{20}$.
   Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.
   (d) Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

Exercice 41 (Conformité d'un produit)

Un fabricant de yaourts brassés utilise une machine pour remplir ses pots, dont la masse affichée est de $125g$. La masse de yaourt X introduite dans chaque pot suit la loi $\mathcal{N}(125 \; ; \; 2)$ et un pot est déclaré conforme s'il contient au moins $122g$ de yaourt brassé.

1. Quelle est la probabilité qu'un yaourt soit conforme ?

2. Le gérant souhaite modifier les réglages de la machine pour diminuer le nombre de pots non conformes. Il souhaite obtenir 97% de yaourts conformes, sans changer la quantité moyenne de yaourt introduite en pots.

   On suppose que la masse X de yaourt suit toujours une loi normale d'espérance $\mu = 125$. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.

   (a) Soit $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma'}$. Quelle loi suit Z ?

   (b) Expliquer pourquoi $122 \leqslant X \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\sigma'} \leqslant Z$.

   (c) En déduire la valeur de σ'.

3. Un ingénieur lui a indiqué qu'il ne pourrait pas modifier l'écart-type, mais uniquement la moyenne. En prenant $\sigma = 2$, quelle quantité μ' de yaourt doit-être introduite pour obtenir 97% de yaourts conformes ?

Exercice 42

Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5mm et 7mm.

On suppose que le diamètre, en millimètre, d'une rondelle suit la loi $\mathcal{N}(6\ ;\ 0,5)$.

1. Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondir au millième.
2. On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres.

   À combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?
3. Le directeur général veut améliorer la qualité de la production.

   Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conforme par deux, en utilisant des machines plus régulières.

   Quelle nouvelle valeur de l'écart-type σ doit-il viser ? Arrondir au centième.

Exercice 43

Un lanceur de javelot amateur, souhaitant étudier ses performances, modélise la distance parcourue par son javelot (en mètre) par une loi normale de paramètres μ et σ inconnus. Après une semaine d'entraînement, il a relevé que dans 7.62% des cas, ses lancers ne dépassaient pas les 50 mètres, alors que 23.75% d'entre eux franchissaient la ligne des 65 mètres.

Quelles valeurs doit-il prendre pour μ et σ ?

4.3 Quelques intervalles remarquables

Exercice 44

X_1, X_2 et X_3 suivent des lois normales de paramètres, respectivement $\mu_1 = 3$ et $\sigma_1 = 1$, $\mu_2 = -2$ et $\sigma_2 = 0,5$, $\mu_3 = 5$ et $\sigma_3 = 10$.

Sans utiliser une calculatrice, donner les probabilités suivantes :

1. $P(X_1 > 3)$
2. $P(-5 < X_3 < 15)$
3. $P(-3 \leqslant X_2 \leqslant -1)$
4. $P(X_1 < 0)$

Exercice 45

Une usine de produits chimiques utilise une machine automatique pour remplir des sachets d'engrais en poudre. Le poids, en grammes, d'engrais par sachet peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 4$. Le poids de produit affiché sur les sachets est de $500g$.

1. La machine est réglée pour obtenir $\mu = 505$. Quelle est la probabilité que le poids d'engrais dans le sachet soit inférieur au poids affiché de $500g$?
2. Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour qu'au plus 5% des flacons aient un poids inférieur au poids affiché de $500g$?

Exercice 46

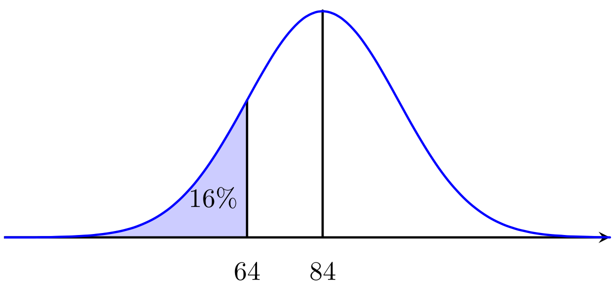
Nicolas étudie les résultats obtenus par les élèves de sa classe lors des contrôles. Il a remarqué que près de 95.4% des notes tombaient entre 6 et 17.
Il décide de modéliser la note obtenue par un élève par une loi normale. Quelles valeurs peut-il choisir pour les paramètres μ et σ ?

Exercice 47

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma)$ de moyenne μ et d'écart-type σ.

De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. (a) D'après le graphique, quelle valeur peut-on choisir pour μ ?
   (b) Toujours en exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   (c) Sans calculatrice, déterminer quelle valeur approchée entière de σ on peut proposer.
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   (b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
   (c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

5 Approximation de Loi

Exercice 48

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».

On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.

On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   (a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1,25 \leqslant Z \leqslant 2,5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

Exercice 49

Un ingénieur souhaite acheter une machine permettant de fabriquer en série des cotons-tiges.

Le fabricant indique que le coton se détache de la tige dans 0.05% des cas, rendant le produit défectueux.

L'ingénieur a pour intention de faire fonctionner cette machine pendant 10 ans, pour produire 5 milliards de cotons-tiges.

On suppose que le fait qu'un coton-tige soit défectueux est indépendant de l'état des autres cotons-tiges.

On note X le nombre de cotons-tiges défectueux que produira la machine pendant ces 10 ans.

1. (a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Peut-on déterminer la probabilité qu'au plus 2504000 cotons-tiges soient défectueux à l'aide de la calculatrice ? Du tableur ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Par approximation, on suppose que la variable aléatoire T donnant le nombre, en milliard, de cotons-tiges défectueux suit une loi normale de paramètres $\mu = 2,5 \times 10^{-3}$ et $\sigma = 1,6 \times 10^{-6}$.
   Déterminer une valeur approchée de la probabilité qu'au plus 2504000 cotons-tiges soient défectueux.

6 Approfondissement

Exercice 50

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B. La production journalière de l'usine A est de 600 pièces, celle de l'usine B est de 900 pièces. On prélève un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est 0,014.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est 0,024.

On note :
- D l'évènement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'évènement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'évènement : « le composant est produit par l'unité B »

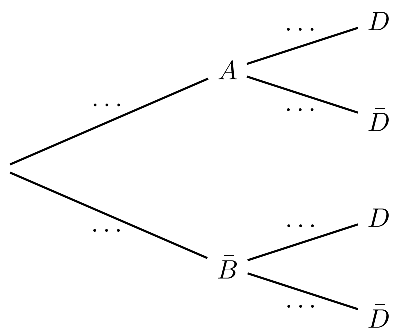
On note $p(D)$ la probabilité de l'évènement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'évènement D sachant que A est réalisé.

Partie A : Généralités

1. (a) D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$.

   (b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. (a) Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.

   (b) En déduire $p(D)$.

4. On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : Contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms. On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200,5$ et d'écart-type $\sigma = 3,5$. On prélève un composant dans la production.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près ; ils seront obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe

1. Calculer la probabilité p_1 de l'évènement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».

2. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement :« La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».

3. On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84.

   Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Annexe

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200,5$ et $\sigma = 3,5$.

t	$p\,(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

Exercice 51

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au millième. Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles.

Partie A : Étude du processus de mise en bouteille

La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans 2 machines M_1 et M_2. La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5 % des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8 % ont un bouchon. D'autre part, 4 % des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon.

On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

- R, l'évènement : « la bouteille est correctement remplie » ;
- B, l'évènement : « la bouteille a un bouchon ».

RAPPEL DES NOTATIONS :

Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

$\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.
3. Montrer que la probabilité que la bouteille ait un bouchon est égale é 0,916.
4. Sachant que la bouteille a un bouchon, déterminer la probabilité qu'elle soit correctement remplie.

Partie B : Production journalière

Une étude sur les dix premières années a montré que la production journalière de bouteilles de lait dans cette entreprise peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2000; 200)$.

1. Calculer la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1800 et 2200 bouteilles.
2. Le service maintenance doit intervenir sur les machines si la production journalière devient inférieure à 1600 bouteilles. Déterminer la probabilité que le service maintenance intervienne sur les machines.

RAPPEL :

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \approx 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \approx 0,977$

Exercice 52

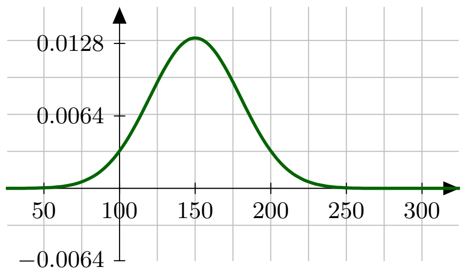
On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$.

La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.

   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.

   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

B . Étude de la zone 2

1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

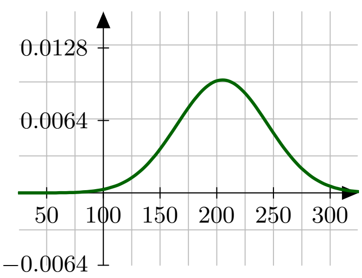
   (a) Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.

   (b) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

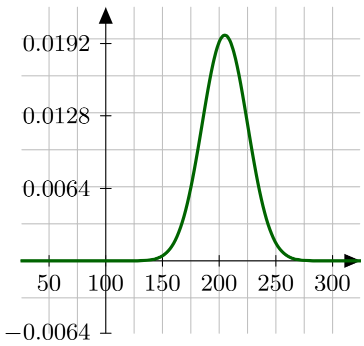
2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.

   En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.

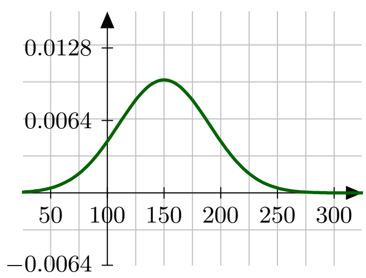
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



7 Extraits de BTS

Exercice 53

On produit en grande quantité des tiges. À chaque tige de la production on associe sa longueur x exprimée en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire X.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 171 et d'écart type $6,2$.

1. On prélève, au hasard, une pièce de la production.

   (a) Calculer la probabilité que la pièce ait une taille inférieur à 160 mm.

   (b) Calculer la probabilité que la pièce ait une taille supérieure à 195 mm.

2. Déterminer, avec une précision à 10^{-3} près, le réel r tel que : $P(|X - 171| \leqslant r) = 0,984$.

   Donner la valeur approchée de r à une unité près par excès.

3. Une pièce est jugée défectueuse si sa longueur n'est pas élément de l'intervalle $[156\ ;\ 186]$.

   (a) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit défectueuse.

(b) On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de 20 tiges dans la production. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de tiges défectueuses d'un tel échantillon.

Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ?

Calculer à 10^{-3} près, la probabilité que sur 20 tiges prélevées, au plus 2 soient défectueuses.

Exercice 54

Une entreprise fabrique, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ». On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,9.

On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

Partie B

Une partie des pièces de la production est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ». Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevèe au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$.

On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prélevèe au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.

Partie C

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité. On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$. La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées. On définit les évènements suivants :

A : « la pièce provient de la machine 1 » ;

B : « la pièce provient de la machine 2 » ;

C : « la pièce est conforme ».

1. Déterminer les probabilités P(A), P(B), P(C/A), P(C/B). On rappelle que P(C/A) est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.
2. En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.
3. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer P(C).

Exercice 55

Une usine fabrique des billes métalliques. L'étude porte sur le diamètre de ces billes, mesuré en millimètres.
On donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque bille prise au hasard dans la production de l'usine, associe son diamètre mesuré en millimètres.

   On admet que X suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,44.

   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Le diamètre de la bille est inférieur à 25,2 ».

   E_2 : « Le diamètre de la bille est compris entre 24,1 et 25,9 ».
2. Certaines billes sont défectueuses. On admet que la probabilité de tirer au hasard une bille défectueuse est 0,04.

   Les billes sont conditionnées par paquets de 150. On admet que le choix d'un paquet peut être assimilé à un tirage avec remise de 150 billes.

   On note Y la variable aléatoire qui associe à tout paquet choisi le nombre de billes défectueuses du paquet.

   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   (b) On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la valeur de λ et déterminer la probabilité de l'évènement E_3 : « Il y a au plus 4 billes défectueuses dans le paquet ».

Exercice 56

Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal. On appelle p la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.

Si le magicien est un imposteur on a $p = \dfrac{1}{2}$, sinon $p > \dfrac{1}{2}$.

On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et on note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe le nombre de succès du magicien. (On arrondira les probabilités au dix millième le plus proche.)

1. Dans cette question on prend $n = 20$.

   (a) Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.

   (b) Calculer la probabilité $P(Y = 15)$.
2. Dans cette question on prend $n = 100$. On admet que la variable aléatoire Y peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.

   (a) Préciser les paramètres de cette loi normale.

   (b) Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y > 60)$.