Sommaire

1 Fonctions de deux variables

Définition, représentation, limites, continuité

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\,; \qquad f_2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}\,; \qquad f_3(x,y)=\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

Exercice 2

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=\ln(2x+y-2)\,; \quad f_2(x,y)=\sqrt{1-xy}\,; \quad f_3(x,y)=\frac{\ln(y-x)}{x}\,; \quad f_4(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2}$$

Exercice 3

Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y)=k$) pour :

$$f_1(x,y)=y^2,\ \text{avec } k=-1 \text{ et } k=1 \qquad f_2(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} \text{ avec } k=2.$$

Exercice 4

Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=x+y-1\,; \quad f_2(x,y)=e^{y-x^2}\,; \quad f_3(x,y)=\sin(xy)$$

Exercice 5

En utilisant les sections par les plans parallèles aux plans de coordonnées indiquer la forme des surfaces représentatives des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=x^2+y^2\,; \qquad f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,; \qquad f_3(x,y)=\frac{y}{x}\,; \qquad f_4(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}\,; \qquad f_5(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$$

Exercice 6

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

$$f_1(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\,; \qquad f_2(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,; \qquad f_3(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$$

Exercice 7

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

$$f_1(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad ; \qquad f_2(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle continue en (0,0) ?

Exercice 9

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Étudier la continuité à l'origine de la fonction suivante : $\begin{cases} f(x,y) & = & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ f(0,0) & = & 0 & \end{cases}$

Dérivées partielles, accroissements finis, recherche d'extrema

Exercice 11

Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du deuxième ordre de :

$$f(x,y) = \ln(xy)\,; \qquad f(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2\,; \qquad f(x,y) = x^y\,; \qquad f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$$

Exercice 12

En utilisant la formule des accroissements finis, donner un encadrement de $f(x,y) = e^{-x}\sin(y)$ si $x = 0,1$ et $y = 28$.

Exercice 13

Donner une valeur approchée de $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ pour $x = 1003$ et $y = 104$.

Exercice 14

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

$$f_1(x,y) = e^x\cos y\,; \qquad f_2(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)\,; \qquad f_3(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$$

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 16

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$.

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Exercice 17

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2(x+y)\,; \qquad f_2(x,y) = e^{xy}.$$

Exercice 18

Déterminer les extrema de :

$$f_1(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y\,; \qquad f_2(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$$

Exercice 19

Si $M(x,y)$ est un point du plan du triangle ABC trouver le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Retrouver ce résultat géométriquement.

Exercice 20

On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 21

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 22

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,; \qquad f_2(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\,; \qquad f_3(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$$

Exercice 23

Déterminer les extremum locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2\,;$
2. $f(x,y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\,;$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy\,;$

Exercice 24

On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5 m^3$ et pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite ?

2 Intégrale multiple

Exercice 25

Calculer l'intégrale double suivante $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$, avec

1. $f(x,y)=x$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ x-y+1\geq 0,\ x+2y-4\leq 0\right\}$.
2. $f(x,y)=x+y$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1;\ x^2\leq y\leq x\right\}$.
3. $f(x,y)=\cos(xy)$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x\leq 2,\ 0\leq xy\leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
4. $f(x,y)=xy$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ xy+x+y\leq 1\right\}$.
   On donne $\dfrac{x(1-x)^2}{(1+x)^2}=x-4+\dfrac{8}{1+x}+\dfrac{4}{(1-x)^2}$
5. $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^3}$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<3,\ y>2, x+y<5\right\}$.

Exercice 26

Soit D le domaine : $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\right\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants : $f_1(x,y)=x^2+y^2$ $\quad f_2(x,y)=xy(x+y)$.

Exercice 27

Soit D le domaine : $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\leq x\leq 1 \text{ et } x^2\leq y\leq 4-x^3\right\}$.

Calculer l'aire de D.

Exercice 28

On considère l'intégrale double : $I=\displaystyle\int_0^8\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{\sin(y^3)}{y}\,dy\right)dx$

1. Quel est le domaine du plan pour lequel $I=\displaystyle\iint_{\mathcal{R}}\frac{\sin(y^3)}{y}\,dxdy$?
2. Le représenter graphiquement.
3. Calculer l'intégrale I.

Exercice 29

On considère l'intégrale double : $I=\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_x^\pi e^{-y^2}\,dy\right)dx$

1. Quel est le domaine du plan pour lequel $I=\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{-y^2}\,dxdy$?
2. Le représenter graphiquement.
3. Calculer l'intégrale I.

Exercice 30

Calculer les intégrales doubles suivantes lorsque $\mathcal{R}$ est le carré $[0;1]\times[0;1]$:

$$\iint_{\mathcal{R}}\frac{x^2y^2}{1+y^2}\,dxdy\,; \qquad \iint_{\mathcal{R}}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)dxdy$$

Exercice 31

Que donne le changement de l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx\,; \qquad \int_{0}^{1}\left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx\,; \qquad \int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Exercice 32

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a :
$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}.$$
En déduire que $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$, où D est le pavé $[0,1]^2$.
2. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que
$$2I = \iint_D \frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy.$$
En déduire que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice 33

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$ pour la fonction f et le domaine $\mathcal{D}$ suivants :

$$f(x,y) = \cos(y^2) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, 0\le x\le 1\,,\, x\le y\le 1\right\}$$

Exercice 34

On pose : $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x^2+y^2\ge 1\right\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

Changement de variable

Exercice 35

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0< x^2+y^2\le 1\right\}$.

Exercice 36

Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$.

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Exercice 37

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants :

1. $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ et $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
2. $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 2y\right\}$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 38

Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x<y<2x,\ x<y^2<2x\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy$ en utilisant le changement de variables $u = x/y$ et $v = y^2/x$.

Exercice 39

Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ y\ge 0, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\iint_D (2x^3-y)dxdy.$

Coordonnées de centre de gravité

Exercice 40

Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine : $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}$.

Exercice 41

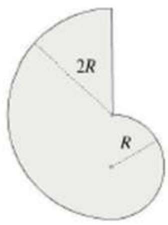
On considère une plaque mince homogène qui a la forme du domaine plan $\mathcal{D}$ par l'axe des abscisses, la parabole d'équation $y = x^2$ et le segment de droite d'équation $y = -x + 2$ reliant $(1,1)$ et $(2,0)$. Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie G.

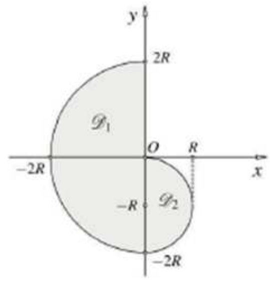
Exercice 42

On considère une plaque homogène qui a la forme du domaine plan $\mathcal{D}$ par : $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq \pi \,,\, 0 \leq y \leq \sin(x)\right\}$
Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie G.

Exercice 43

Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie G d'une plaque mince homogène constituée par la juxtaposition de deux demi-disques de rayons respectifs R et $2R$ comme sur le figure ci-contre.

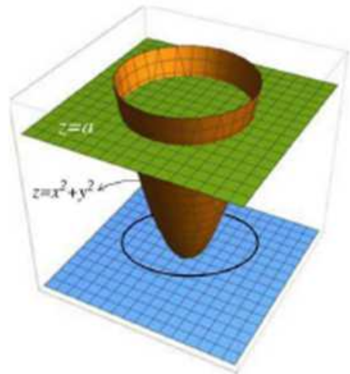




Calculs de volumes

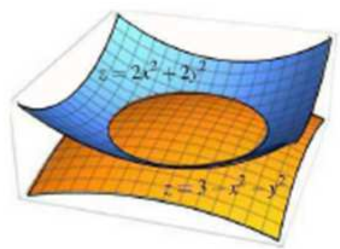
Exercice 44

Calculer le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ du solide $\mathcal{S}$ compris entre les deux plans horizontaux $z = 0$ et $z = a$ ($a > 0$ fixé) et en dessous du parabolïde d'équation $z = x^2 + y^2$



Exercice 45

Calculer le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ du solide $\mathcal{S}$ compris entre les deux surfaces d'équations $z = 3 - x^2 - y^2$ et $z = 2x^2 + 2y^2$.



Exercice 46

Calculer le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ du solide $\mathcal{S}$ délimité par les deux cylindres d'équations $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + z^2 = 1$.