Sommaire

1 Notions et calculs de base

Exercice 1

1. Écrire les matrices à deux lignes et trois colonnes définies par :

   $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = i + j$ $\qquad B = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = 4i + 3j$ si $i \neq j$ et $b_{i,j} = 0$ sinon.

2. Écrire les matrices à trois lignes et deux colonnes définies par :

   $C = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = (-1)^{i+j}$ $\qquad D = (d_{i,j})$ où $d_{i,j} = \int_i^j x dx$

Exercice 2

On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$:

1. Donner le coefficient situé sur la $1^{ère}$ ligne, $2^{ème}$ colonne de A

2. Quelle est la valeur de $a_{3,2}$? De $a_{2,3}$?

Exercice 3 (Somme de matrices)

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice $M = 2A - 3B + C$.

Exercice 4 (Des calculs de sommes et produits)

Calculer lorsqu'ils sont définis les sommes $A + B$, les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (Produits possibles)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Quelles sont les matrices carrées ?

Exercice 6 (Produit de matrices)

Calculer les produits de matrices suivants.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (Produit de matrices ; Matrice Identité)

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits de matrices suivants :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times A \qquad B \times C \qquad C \times B \qquad A \times I \qquad I \times A$$

Exercice 8 (De l'utilité du calcul matriciel)

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que $A = aI + bJ$
2. Calculer J^2.
3. On suppose que $A = 3I + J$.
4. À l'aide des propriétés connues sur le calcul matriciel, montrer que $A^2 = 10I + 6J$, et ce **sans calculer sur les coefficients des matrices** A, I et J.

Exercice 9 (Identité remarquable)

Soit $A,\ B$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+AB+BA+B^2$.

Exercice 10 (Commutant d'une matrice fixée)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 11 (Du calcul ...)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Existe-t-il des couples (a,b) de nombres réels tels que $AB = I$, où I désigne la matrice unité ?

Exercice 12 (Interprétation du produit matriciel)

Une entreprise désire fabriquer de nouveaux jouets pour Noël : une poupée B et une poupée K. Elle désire commander les matières premières nécessaires pour la fabrication de ces jouets. On dispose des informations suivantes :

- La fabrication d'une poupée B nécessite 0,094kg de coton biologique, 0,2kg de plastique végétal et 0,4kg de pièces métalliques.
- La fabrication d'une poupée K nécessite 0,08kg de coton biologique, 0,3kg de plastique végétal et 0,1kg de pièces métalliques.

Par ailleurs, l'entreprise a réalisé les prévisions de ventes suivantes :

- elle pense vendre 1000 poupées B et 800 poupées K en novembre;
- elle pense vendre 2500 poupées B et 1200 poupées K en décembre.

1. Disposer les informations obtenues sous la forme de deux tableaux.
2. En effectuant un produit matriciel, déterminer la quantité de coton biologique à commander pour le mois de décembre, la quantité de plastique végétal pour le mois de novembre.

Exercice 13 (Puissances de matrices)

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que
$$M^2 = aM + bI.$$
3. Exprimer alors M^3 en fonction de M et de I, puis écrire M^3 sous forme de matrice à 3 lignes et 3 colonnes. Comparer avec le résultat obtenu à la première question.
   a Déduire de l'égalité trouvée à la deuxième question que l'on peut écrire
   $$I = \frac{1}{2}M \times (3I - M).$$
   b En déduire une matrice P telle que $M \times P = I$.
   c Écrire P sous forme de matrice à 3 lignes et 3 colonnes.
   d Calculer $P \times M$.

Exercice 14

Sur un chantier de bâtiment, trois entreprises cohabitent : Pouigues, Tumez et Sogea. Elles ont besoin, par jour, pour le bon déroulement de leur chantier de :

	Ciment en tonnes	Sable en m^3	Gravillons en m^3
Pouigues	10	5	5
Tumez	8	3	2
Sogea	7	3	2

Ces renseignements sont présentés sous forme d'une matrice 3×3, appelée matrice des achats, notée M. Ici, on a

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces matériaux sont vendus par trois fournisseurs aux prix unitaires indiqués dans le tableau suivant.

	Fournisseur 1	Fournisseur 2	Fournisseur 3
Ciment	45 €	40 €	47 €
Sable	15 €	20 €	13 €
Gravillons	20 €	17 €	15 €

Présenter ces renseignements sous forme d'une matrice 3×3, notée N.
Effectuer le produit $M \times N$. que représentent les prix obtenus dans chacune des colonnes de la matrice $M \times N$?

Exercice 15 (Puissance n-ième - avec la formule du binôme)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 16

Trouver les matrices 2×2 solutions du système : $\begin{cases} 2A - B & = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A + B & = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 17

Calculer pour chacune des matrices suivantes le carré, le cube puis par récurrence la puissance $n^{ième}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $A^n = a_n A + b_n I$. Calculer a_n et b_n.

2 Inverses et calculs

Exercice 19 (Calcul algébrique avec des inverses)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, supposées inversibles. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $(2I_n + B^{-1})B + A(B - A^{-1} + 2A^{-1}B) - AB$
2. $A(7I_n + A^{-1}) - B(5B^{-1}A + B^{-1} + A) + A(B - 2I_n)$

Exercice 20 (Annulateur)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB, AC.

Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ?

Trouver toutes les matrices F de taille 3×3 telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 21 (Inverser une matrice sans calculs !)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 22

En appliquant la méthode du cours, inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 (Inverse avec calculs !)

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Résolution de systèmes

Exercice 24 (Sans problèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x - y + 2z = 9 \\ x + 2y - z = -6 \end{cases}$$

Exercice 25 (Trop d'inconnues ou d'équations)

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Exercice 26 (Système et interprétation géométrique)

Résoudre, suivant les valeurs de m, le système suivant :

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 27 (Paramètre dans le second membre)

Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z &=& 1 \\ x-2y+2z &=& m \\ x+y-z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 28 (Systèmes proches, et pourtant ! Systèmes mal conditionné)

Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+5y+9z &=& 180 \\ 9x+10y+5z &=& 40 \\ 10x+9y+z &=& -50 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+5y+9z &=& 180 \\ 9x+10y+5z &=& 41 \\ 10x+9y+z &=& -50 \end{array}\right.$$

Exercice 29 (Paramètre dans le second membre)

Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1 \\ 3x+y-z &=& 1 \\ x-2y+2z &=& m \end{array}\right.$$

Exercice 30 (Discussion suivant deux valeurs)

Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& 0 \\ x+my+z &=& 0 \\ mx+y+z &=& 0 \end{array}\right.$$

Exercice 31

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

En déduire la résolution du système $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 1 \\ -3x+y+3z &=& 2 \\ 2x+y-2z &=& -2 \end{array}\right.$

4 Problèmes

Exercice 32 (Polynômes vérifiant certaines propriétés)

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. la représentation graphique de P passe par les points $A(2, -3), B(3, -4), C(6, 5)$;
3. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Exercice 33 (Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples)

Soit $f(x) = \dfrac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 34 (Problèmes de production)

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : L, C et V.

Pour un appareil de type L, on a besoin de $10kg$ d'acier, $2kg$ de peinture et 10 heures de travail.

Pour un appareil de type C, on a besoin de $4kg$ d'acier, $1kg$ de peinture et 6 heures de travail.

Pour un appareil de type V, on a besoin de $10kg$ d'acier, $1kg$ de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y, et z les quantités d'appareils de type L, C et V fabriqués et a, p, t les quantités d'acier (en,kg), de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} a \\ p \\ t \end{pmatrix}$$

   Montrer que $Y = MX$.

2. On donne la matrice :

$$M' = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

   a Calculer le produit $M'M$.

   b En déduire la matrice X en fonction des matrices M' et Y.

3. En déduire les quantités d'appareils de chaque type L, C, V fabriqués en un mois, sachant que $4200kg$ d'acier, $800kg$ de peinture et 5000 heures de travail ont été nécessaires.

Exercice 35 (Programme de production)

Une entreprise assure le production de 3 types d'objets A_1, A_2 et A_3 en quantités (hebdomadaires) respectives x_1, x_2 et x_3.

Un programme de production hebdomadaire s'exprime par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1, \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de taille 3×1.

Par exemple, le programme de production $(10, 20, 30)$ correspond á la production de 10 objets A_1, 20 objets A_2 et 30 objets A_3.

Pour réaliser un programme de production (x_1, x_2, x_3), on utilise y_1 kilogrammes de matières première, y_2 heures de travail et y_3 kilowatts-heure d'énergie, ce que l'on représente par la matrice 3×1 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de taille 3×1..

On considère la matrice de production M qui lie les matrices Xet Y, c'est-à-dire telle que : $Y = MX$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le matrice Y associée à la matrice $X = (10, 20, 30)$
2. Déterminer à l'aide d'un logiciel la matrice X qui a pour matrice associée la matrice $Y = (230, 130, 100)$

Exercice 36 (Système d'équations et calcul matriciel)

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

Où $a, b, c, x, y,$ et z sont des nombres réels.

On considère le système d'équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} - & x & - & 3y & & & = a \\ & x & - & y & & & = b \\ & x & + & 3y & + & 2z & = c \end{array} \right.$$

1. Montrer que résoudre le système (S) à trois inconnues réelles $x, y,$ et z revient à résoudre l'équation $(E) \qquad MX = Y$ où l'inconnue est la matrice X.
2. a Calculer M^2 et M^3.

   b Exprimer M^3 en fonction de I.
3. a Montrer que l'équation $Y = MX$ est équivalente à l'équation $X = \frac{1}{8}M^2Y$.

   b En déduire la solution de (S).

   c Donner les solutions de (S) lorsque :

$$a = 3, \qquad b = -5, \qquad \text{et} \qquad c = -4$$

Exercice 37 (Puissance n-ième, par récurrence)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$. Répondre aux mêmes questions pour B.

Exercice 38 (Matrices et suites)

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.
3. Montrer que :
$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 39

Trouver trois réels α,β, γ tels que pour tout polynôme de degré 3 on ait :

$$\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$$

Exercice 40

Soit a, b, c et d des réels tels que $ad - bc \neq 0$. On considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Trouver en fonction de a, b, c et d les réels x, y, z et t tels que : $A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Vérifier que A admet pour matrice inverse : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   Remarque

   Pour une matrice 2×2 du type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le nombre $ad - bc$ s'appelle le déterminant de la matrice.

   Il permet de savoir rapidement si une matrice de cette taille est inversible ou non.

   Le déterminant se généralise à des matrices de taille supérieure mais ce n'est pas au programme.