Dans ce qui suit, l'espace euclidien de dimension 2 est rapporté sauf mention du contraire à un repère orthonormé $(O; (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}))$.

L'espace euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$.

Sommaire

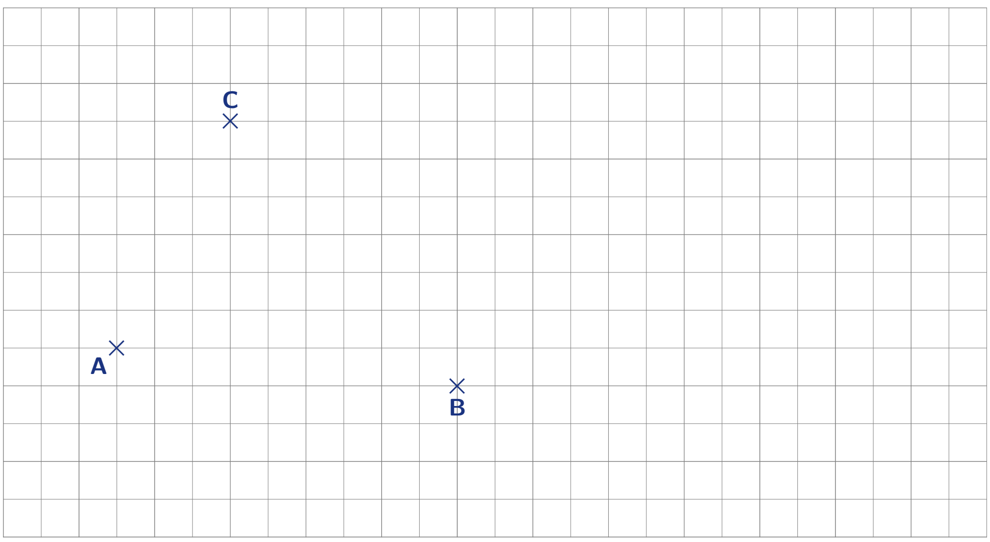
1 Rappels sur les vecteurs

Exercice 1 (Exercice de construction)

1. Construire un triangle MNP
2. (a) Placer le point A tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NA}$
   (b) Placer le point B tel que $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{NB}$
   (c) Placer le point C tel que $-\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{NA}$
3. Que peut-on en déduire sur la position de N et de P ?

Exercice 2 (Exercice de construction)

1. Sur le dessin ci-dessous, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.



2. Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

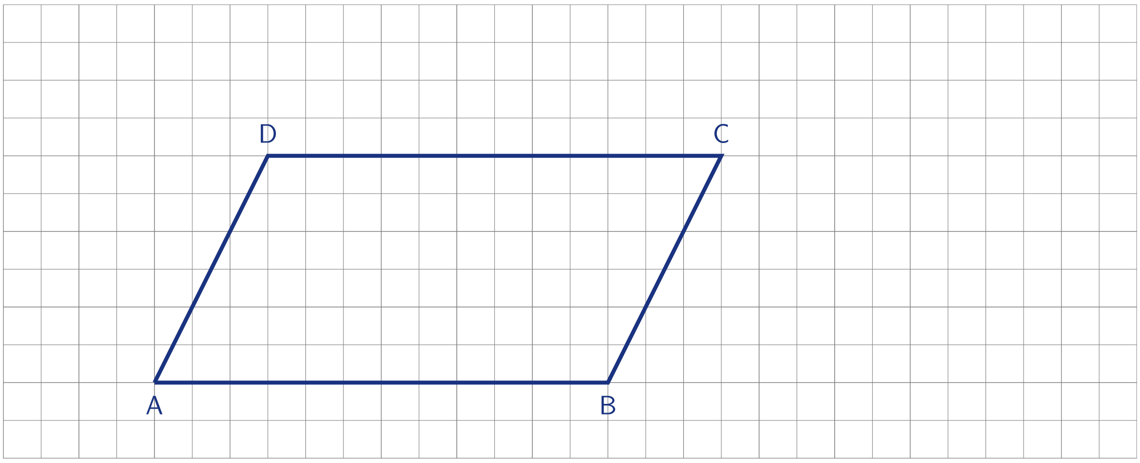
Exercice 3

Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que les points A, M et N sont alignés.

Exercice 4

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Placer les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Exercice 5 (À propos de la relation de Chasles)

On considère un quadrilatère $MNOP$.

1. Simplifier les sommes :
   $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$
2. Établir la relation : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{MO} = 0$.
3. On suppose de plus que pour tout point A du plan, on a : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP} = 0$
   (a) Montrer que $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ON} = 0$.
   (b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $MONP$.

Exercice 6

Soit [IJ] un segment et M un point du cercle de diamètre [IJ]. Faire une figure.

1. Que dire de l'angle $\widehat{\mathrm{IMJ}}$? Justifier.
2. Construire le point K tel que $\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{IM}}$.
3. Construire le point L tel que $\overrightarrow{\mathrm{JL}} = \overrightarrow{\mathrm{JI}} + \overrightarrow{\mathrm{JK}}$.
4. Déterminer la nature du quadrilatère IJKL.

Exercice 7

Soit [IJ] un segment et M un point du cercle de diamètre [IJ]. Faire une figure.

1. Que dire de l'angle $\widehat{\text{IMJ}}$? Justifier.
2. Construire le point K tel que $\overrightarrow{\text{MK}} = \overrightarrow{\text{IM}}$.
3. Construire le point L tel que $\overrightarrow{\text{JL}} = \overrightarrow{\text{JI}} + \overrightarrow{\text{JK}}$.
4. Déterminer la nature du quadrilatère IJKL.

2 Calcul vectoriel dans le plan

Exercice 8

Dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J), placer les points : A$(8\ ;\ 1)$ B$(4\ ;\ 8)$ et C$(-4\ ;\ 7)$

1. (a) Donner sans justifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{OC}}$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère OABC ?
2. Démontrer que OABC est un losange.

Exercice 9

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J) placer les points suivants : A$(-1\ ;\ 1)$, B$(3\ ;\ 3)$, C$(5\ ;\ -1)$ et D$(1\ ;$

   L'unité est le centimètre.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$.

   En déduire la nature du quadrilatère ABCD.
3. Calculer la distance BC.
4. On admet que AB $= 2\sqrt{5}$ et AC $= 2\sqrt{10}$.
   (a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle.
   (b) Préciser alors, en justifiant la réponse, la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 10

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points suivants : A$(-3\ ;\ -2)$ B$(-1\ ;\ 9)$ C$(9\ ;\ 4)$

1. Faire une figure en prenant 1 cm pour unité de longueur.
2. On note M le mileu du segment [AC]. Calculer les coordonnées du point M.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Calculer la longueur BC. On donnera la valeur arrondie à $0,1$ près.

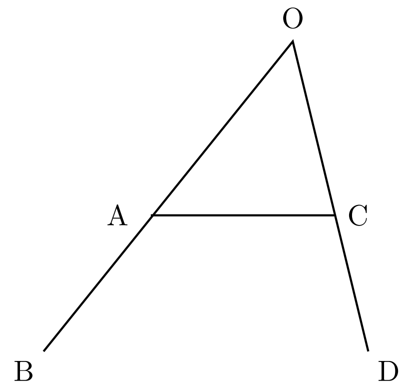
Exercice 11

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, le point A est sur le segment [OB] et le point C est sur le segment [OD].

On donne :

OA = 8,5 cm ; AB = 11,5 cm ;

OC = 5 cm ; CD = 7 cm.



1. Calculer les longueurs OB et OD.
2. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère $(O; (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}))$ on donne les points $A(-1; 1)$, $B(2; 1)$ et $C(-2; 3)$

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{0}$.
3. Les points B, M et P sont-ils alignés ?

Exercice 13

1. Quel est l'ensemble des m pour lesquels la norme du vecteur $\begin{pmatrix} 2m-1 \\ 4 \end{pmatrix}$ égale à 7 ?
2. Déterminer m pour que les vecteurs $\begin{pmatrix} m+1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$ soient linéairement dépendants ?
3. Déterminer m pour que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3m \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice 14

On donne les points $A(3; 5)$, $B(-2; 4)$, $C(-3; 2)$, $D(12; 5)$; soit K et L les milieux des segments $[CD]$ et $[AB]$ respectivement.

1. Montrez que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. Exprimez $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{KL}$ dans la base $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
3. Dans le but de prouver que les droites (AD), (KL) et (BC) sont concourantes, définissons les points S_1, S_2, S_3 tels que $\overrightarrow{DS_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{KS_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{CS_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$
   - Faites une figure.
   - Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{CS_1}$, $\overrightarrow{CS_2}$, $\overrightarrow{CS_3}$ dans la base $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
   - Quelles conséquences en tirez-vous ?

Exercice 15

Soit A, B, C les sommets d'un triangle quelconque, K le point milieu du segment $[BC]$, L le milieu de $[CA]$ et M le milieu de $[AB]$. Démontrez par calcul que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

Exercice 16

On considère les points suivants $A(-4;-2)$ $B(5;4)$ $C(7;1)$ $D(-2;-5)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer AB.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$; $3\overrightarrow{u}$ et $5\overrightarrow{u}-4\overrightarrow{v}$.
3. Calculer les coordonnées du point E pour que $ABDE$ soit un parallélogramme.
4. Calculer les coordonnées du point I milieu de $[CD]$.
5. On donne le point $F(9;6)$, les points A, B et F sont-ils alignés ?
6. On donne le point $G(15;3)$. Les droites (BC) et (GF) sont-elles parallèles ?
7. Déterminer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AC}$
8. Le point $L(-1;3)$ est-il sur la médiatrice de $[AB]$?
9. Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB)

Exercice 17 (Critères de colinéarité et d'orthogonalité dans le plan)

Soient $A(2;1)$, $B(4;2)$, $C(0;5)$; $D(2;6)$. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$

3 Calcul vectoriel dans l'espace

Exercice 18 (Familles libres, familles liées)

Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ou non :

1. $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$ et $\overrightarrow{v}=(-1,3,2)$.
2. $\overrightarrow{u}=(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}=(4,2,6)$.
3. $\overrightarrow{u}=(3,2,1)$, $\overrightarrow{v}=(3,0,1)$.
4. $\overrightarrow{u}=(2,4,6)$, $\overrightarrow{v}=(4,2,6)$, $\overrightarrow{w}=(6,4,2)$.
5. $\overrightarrow{u}=(-1,0,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{w}=(0,1,2)$.

Exercice 19 (Bases ?)

Les systèmes suivants forment-ils des bases de l'espace ?

$S_1=\{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;

$S_2=\{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;

$S_3=\{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ;

$S_4=\{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Exercice 20 (Base et coordonnées)

Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de l'espace. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

Exercice 21 (Base à paramètres)

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel t la famille $\big((1, t), (t, 3)\big)$ est-elle une base du plan ?
2. Même question avec la famille $\big((1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\big)$ de vecteurs de l'espace.

Exercice 22

Soient $A(2; 1; 5)$, $B(4; 2; 4)$, $C(3; 3; 5)$; $D(1; 3; 7)$.

1. Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles
2. Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 23

Soient $A(0; 1; -1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$; $D(7; 3; -1)$.

1. Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$
3. Qu'en déduit-on pour les points A, B, C et D ?

Exercice 24

Soient $A(-2; 2; -1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-2; 0; 0)$; $D(0; -4; 1)$ et $E(-2; -1; -2)$.

1. Vérifier que A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire au vecteur $-\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{Ac}$.
3. Qu'en déduit-on pour la droite (DE) ?

Exercice 25 (Points coplanaires : deux méthodes)

$ABCD$ est un tétradre. I, J et K sont les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[JC]$. E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Méthode 1 :

1. Montrer que I, E, et D sont alignés.
2. Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?
3. En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

Méthode 2 : Dans un repère

1. Pourquoi $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est-il un repère de l'espace ?
2. Déterminer dans ce repère les coordonnées de tous les points de la figure (tracer là).
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IF} + b\overrightarrow{IE}$. Qu'en déduit-on pour E, F et K ?

Exercice 26

1. Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ? $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Même question avec : $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$

3. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}$ soient coplanaires. Exprimer alors le vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 27

Soit m un réel. On considère les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-m \end{pmatrix}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ? Que peut-on dire alors des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$?

2. Pour quelle(s) autre(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

3. On suppose m différent de -2 et 1. Calculer en fonction de m les coordonnées du vecteur $\vec{d}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4 Systèmes de coordonnées

Exercice 28 (Coordonnées cartésiennes et polaires)

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M de coordonnées polaires $(6; \frac{\pi}{3})$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M de coordonnées polaires $(2; \frac{7\pi}{4})$

3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M de coordonnées polaires $(4; \frac{11\pi}{6})$

4. Déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

5. Déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $(0; 8)$

6. Déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$

Exercice 29 (Coordnnées cartésiennes, cylindriques et sphériques)

Convertir en coordonnées

1. Cartésiennes les coordonnées cylindriques $r = 3$, $\theta = \frac{-\pi}{6}$, $z = 2$.

2. Cartésiennes les coordonnées sphériques $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

3. Cylindriques les coordonnées cartésiennes $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 1$

4. Sphériques les coordonnées cartésiennes $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

Exercice 30 (D'un système de coordonnées à l'autre)

Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point $M(2, 2\sqrt{3}, 4)$.

Exercice 31

Décrire les surfaces suivantes dans le système de coordonnées le mieux adapté :

1. Le demi-disque supérieur de centre O et rayon 2 en polaires
2. La surface triangulaire de sommets $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$
3. La portion de cylindre d'axe (Oz), de rayon 3, comprise entre les plans d'équations $z = 1$ et $z = 2$
4. Le cône droit de base circulaire de rayon R et de hauteur H
5. Le noyau externe de la Terre, d'épaisseur $2300km$ à partir de $1200km$ du centre

Exercice 32 (Distance terrestre)

La terre étant assimilée à une sphère de rayon R, calculer la distance à vol d'oiseau entre le point A de longitude θ_1 et de latitude ϕ_1 et le point B de longitude θ_2 et de latitude ϕ_2. On rappelle que cette distance est donnée par la longueur de l'arc de cercle intersection de la sphère et du plan OAB.

Application numérique : Calculer la distance entre Paris (48deg 49min N, 2 deg 19 min E) et Buenos Aires (34 deg 40 min S, 58 deg 30 min O). On prendra $R = 6378$.

5 Equations paramétriques

Exercice 33 (Équations paramétrique de droites dans l'espace)

1. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1; 5; -4)$
2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(-2; 5; 4)$ et $B(3; 0; -6)$
3. Une droite (d) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+3t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1-2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$
   (a) Donner un vecteur directeur de cette droite.
   (b) Donner deux points distincts de (d).
   (c) Le point $P(-1; -2; -5)$ appartient-il à (d) ?

Exercice 34

Étudier les positions relatives de (d_1) et (d_2), puis (d_2) et (d_3) et enfin (d_1) et (d_3).

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+3t \\ y & = & -1-3t \\ z & = & 2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4-3t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & -5+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad d_3 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6t \\ y & = & 6t \\ z & = & -4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 35 (Équations paramétrique de plans dans l'espace)

Montrer que les points $A(3; 3; 0)$, $B(5; 4; -2)$ et $C(6; 2; 1)$ définissent un plan et en donner une représentation paramétrique.

Exercice 36 (Équation d'un plan passant par trois points)

On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Parmi les représentations paramétriques suivantes quelles sont celles qui correspondent à l'unique plan $\mathcal{P}$ passant les trois points $A(1,1,0)$, $B(-1,0,4)$ et $C(2,2,-1)$?

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = & 1 - s + 3t \\ y = & 1 + 2t \\ z = & 3s - 5t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = & 1 - 2s + t \\ y = & 1 - s + t \\ z = & 4s - t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{P}_3 : \begin{cases} x = & 1 - s \\ y = & -1 + 2t \\ z = & 2s \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Exercice 37

Le plan P apour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = & -2 + t + s \\ y = & -t + 2s \\ z = & 1 + 3t - s \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R}$

1. Préciser les positions relatives des plans P et $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan π passant par $A(1;3;0)$ et parallèle à P.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ intersection de π et du plan $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

Exercice 38 (Point d'intersection de deux droites)

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= -1 - t \\ z &= 4 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 39 (Droites non coplanaires)

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\begin{cases} x &= -2 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= 3 + t \\ y &= -2 + 3t \\ z &= 1 + t \end{cases} \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.