Sommaire

1 Barycentres

1.1 Barycentres de 2 points pondérés

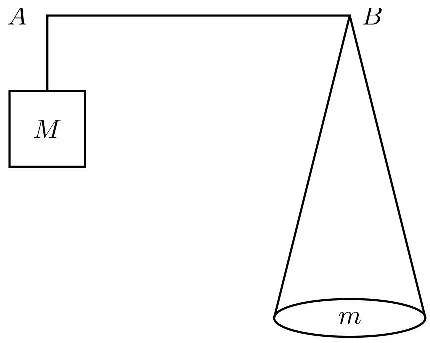
Exercice 1 (Un peu de physique...)

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige (voir schéma). Pour peser une masse m, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige.

On supposera que $M = 2$ kg.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment $[AB]$ pour être à l'équilibre ?
   - $m = 3$ kg
   - $m = 5$ kg

2. Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
   Quelle est la masse m pesée ?



Exercice 2 (Construction simple)

Soit $[AB]$ un segment de longueur 12cm.

1. Placer le point G, barycentre de $\{(A\ ;\ 2)\quad (B\ ;\ 1)\}$
2. Placer le point K, barycentre de $\{(A\ ;\ 3)\quad (B\ ;\ 5)\}$
3. Placer le point L, barycentre de $\{(A\ ;\ -1)\quad (B\ ;\ 3)\}$

Exercice 3 (Construction dans un triangle)

On considère un triangle ABC de mesures $AB = 4cm$; $AC = 5cm$ et $BC = 5,5cm$.

1. Faire un dessin en respectant les distances.
2. Sur votre figure, placer les points :

   (a) $K = bar\{(B;4)\ ;\ (C;7)\}$

   (b) $L = bar\{(B;4)\ ;\ (A;-2)\}$

   (c) $M = bar\{(A;4)\ ;\ (C;1)\}$

   (d) $P = bar\{(K;2)\ ;\ (L;1)\}$

Exercice 4 (Barycentre de 2 points affectés de poids positifs)

1. Un cas particulier :
   on considère deux points A et B, et G le barycentre de $\{(A;4)\ ;\ (B;5)\}$.

   (a) Faire une figure, et y placer les points A, B et G.

   (b) Que peut-on dire du point G. Vérifier votre conjecture.

2. Le cas général :
   soit a et b deux réels strictement positifs, et A et B deux points du plan. On pose G le barycentre de A et B affecté des poids a et b. Démontrer que le point G est strictement situé sur le segment $[AB]$.
3. Sortons du cadre de l'exercice. Que peut-on dire du cas où G est le barycentre de $\{(A;a)\ ;\ (B;b)\}$ lorsque :
   - a est positif et b est négatif.
   - a est négatif et b est positif.
   - a et b sont tous deux négatifs.

Exercice 5 (Application concrète : premiers ensembles de points)

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$, et montrer que F est le barycentre des points A et B affectés de coefficients que l'on déterminera.
2. P étant un point du plan, réduire chacune des expressions suivantes :

   a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$ b) $-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$ c) $2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$

3. Applications :
   (a) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\| = \| -\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}\|$
   (b) Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\|$

1.2 Barycentres de n points pondérés

Exercice 6 (Construction simple)

$ABCD$ est un quadrilatère et G est le barycentre de $\{(A;1);(B;1);(C;3);(D;3)\}$. Construire le point G. (Argumenter)

Exercice 7 (Une démonstration simple)

Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $\{(A;-2);\ (B;-2);\ (C;15)\}$. Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 8 (Construction et démonstration)

ABC est un triangle.

1. G est le barycentre de $\{(A;1);\ (B;2);\ (C;3)\}$. Construire le point G. (Argumenter)
2. G' est le barycentre de $\{(A;1);\ (B;3);\ (C;-3)\}$. Construire le point G'. (Argumenter)
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Exercice 9 (Barycentre dans un repère)

1. Placer dans un repère les points $A(1;2)$, $B(-3;4)$ et $C(-2;5)$.
2. Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A;3);\ (B;2);\ (C;-4)\}$.
   (a) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
   (b) La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? (Justifier)

Exercice 10 (Application des propriétés)

B est le milieu de $[AC]$. Démontrer que le barycentre de $\{(A;1);\ (C;3)\}$ est confondu avec celui de $\{(B;2);\ (C;2)\}$.

Exercice 11 (Comme pour les médianes...)

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de $\{(B;2);\ (C;-3)\}$, le barycentre B' de $\{(A;5);\ (C;-3)\}$ ainsi que le barycentre C' de $\{(A;5);\ (B;2)\}$. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Indication : on pourra considérer le barycentre G de $\{(A;5);\ (B;2);\ (C;-3)\}$.

Exercice 12 (Un autre exercice avec des coordonnées)

Dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j})$, placer les points $A(2;1)$, $B(-1;5)$, $C(5;7)$ et $G\left(1;\frac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC.
3. Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de $\{(A;1);\ (B;k)\}$? Justifier.

Exercice 13 (Ensemble de points (bis))

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 14 (Ensemble de points (ter))

$ABCD$ est un carré.

1. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = AB$?
2. Représenter cet ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 15 (Ensemble de points (encore, eh oui))

ABC est un triangle. I et G sont définis par : $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$.

1. Exprimer G comme barycentre des points A, B et C.
2. La droite (BG) coupe le segment $[AC]$ en un point J. Déterminer la position de J sur $[AC]$.
3. Déterminer et tracer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right\|$.

Exercice 16 (Barycentre dans une pyramide)

$ABCDE$ est une pyramide à base carrée $BCDE$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E. On note O le centre du carré $BCDE$ (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD)) *(Pour cet exercice, une figure est recommandée)*

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de B, C, D, et E.
2. Démontrer que G est le barycentre de $\{(O\ ;\ 4)\ ;\ (A\ ;\ 1)\}$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1 I)$.

Exercice 17 (Barycentre dans un tétraèdre)

$ABCD$ est un tétraèdre et G est le barycentre de $\{(A\ ;\ 4)\ ;\ (B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ 1)\ ;\ (D\ ;\ 1)\}$. On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C et D). *(Pour cet exercice, une figure est recommandée)*

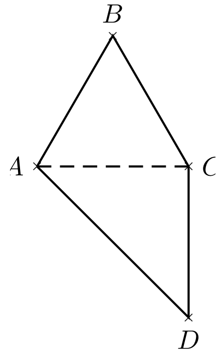
1. Démontrer que G est le barycentre de $\{(H\ ;\ 3)\ ;\ (A\ ;\ 4)\}$.
2. Situer le point G sur la droite (AH).

Exercice 18

On considère le quadrilatère $ABCD$ et on note G le barycentre du système de points pondérés $\{(A,2),(B,1),(C,4),(D,1)\}$.
On appelle I le milieu de $[AD]$, J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[IJ]$. Démontrer que G est le milieu de $[CK]$.

Exercice 19 (Application concrète)

Une plaque homogène P d'épaisseur négligeable est un quadrilatère $ABCD$ tel que ABC est équilatéral et de côté 1m et ACD est rectangle et isocèle en C.



1. Déterminer I_1 le centre d'inertie de ABC.
2. Déterminer I_2 le centre d'inertie de ACD.
3. Déterminer I le centre d'inertie de P.
4. Déterminer G l'isobarycentre de A, B, C et D.
5. Que constate-t-on ?

Exercice 20

On considère un triangle ABC et on appelle G le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$. Soit I et J tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les droites (BI) et (AJ) se coupent en G. On commencera par exprimer I et J comme barycentres de deux points pondérés.

Exercice 21

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est défini par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, le point J est le centre de gravité du triangle ABC et le point K est le symétrique de I par rapport à J.

1. Exprimer les points I, J et K comme barycentres de deux ou trois points pondérés.
2. En déduire que le point K appartient au plan (BCD).
3. On appelle L le milieu de $[BC]$. Démontrer que les points K, L et D sont alignés.

Exercice 22

Soit $ABCD$ un tétraèdre. E est le barycentre de $\{(A,-1),(B,2),(C,-3)\}$, F celui de $\{(E,1),(D,1)\}$,
G celui de $\{(A,1),(D,2)\}$ et H celui de $\{(B,2),(C,-3)\}$.

1. Démontrer que les points F, G, B et C sont coplanaires.
2. Démontrer que les points F, G et H sont alignés.

Exercice 23

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$. Le point K est le barycentre du système $\{(C,1,(D,3)\}$ et L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.
Démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

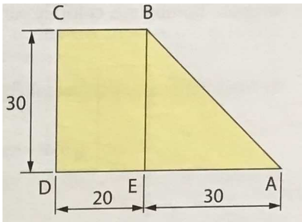
Exercice 24

Soit ABC un triangle et D, E, F les points définis par : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$.

1. Exprimer D, E et F comme barycentres de deux points pondérés puis démontrer que D, E et F sont alignés.
2. Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A,-4),(B,6),(C,3)\}$. Démontrer que les droites (EB) et (DC) se coupent en G. Préciser la position de G sur le segment $[DC]$.

Exercice 25

La figure représente une plaque homogène ABCD. Les cotes sont en centimètres. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque dans un reprère bien choisi. Arrondir à 10^{-1}.



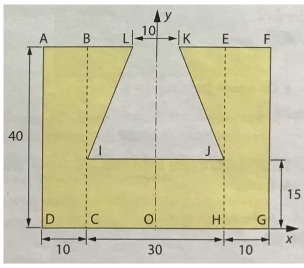
Exercice 26

On se propose de déterminer la position du centre de gravitéde la surface supposée homogène coloriée sur la figure, sur laquelle les cotes sont en millimètres. Pour cela on munit le plan d'un repère orthonormé $(O;(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}))$ tel que l'axe des ordonnées soit axe de symétrie (voir la figure).

1. On découpe la surface en trois surfaces rectangulaires, $ABCD$, $EFGH$, $IJHC$ et deux triangulaires, BLI et KEJ. (voir la figure). Déterminer les coordonnées des centres de gravité respectifs G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 des cinqs surfaces élémentaires précédentes.

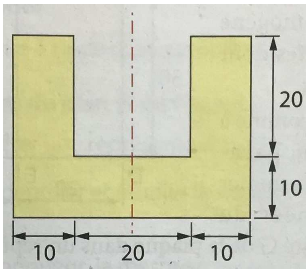
2. En admettant que le centre de gravité G de la surface totale est le barycentre du système des cinq points G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 affectés de l'aire de la surface correspondante, déterminer la valeur approchée arondie à 10^{-1} de l'ordonnée de G.

3. Quel est l'abscisse de G dans ce repère ?



Exercice 27

Déterminer la position du centre de gravité de la surface supposée homogène, coloriée sur la figure.

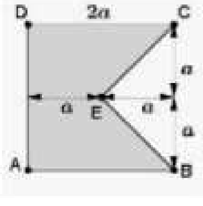


Exercice 28

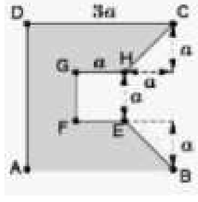
1. Déterminer le centre de masse d'un disque homogène de centre O, de rayon R évidé d'un disque passant par O et de rayon $\frac{R}{2}$

2. Déterminer la position du centre de masse des plaques matérielles homogènes suivantes (partie grisée) :

a)



b)



2 Produit scalaire

2.1 Dans le plan

Exercice 29

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(a-1;-1)$ et $\overrightarrow{v}(2;1)$ où a est un nombre réel. Déterminre a pour que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$

Exercice 30

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. $\overrightarrow{u}(2;3)$ et $\overrightarrow{v}(-1;3)$
2. $\overrightarrow{u}(-2;3)$ et $\overrightarrow{v}(6;-2)$
3. $\overrightarrow{u}(2;0)$ et $\overrightarrow{v}(0;4)$

Exercice 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soit A, B et C, de coordonnées respectives $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,8)$.

1. Faire une figure
2. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
4. Calculer les distances AB et AC.
5. En déduire la valeur approchée en degrès arrondie à 10^{-1} de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2.1.1 Équation de droite.

Exercice 32

Soit $A(2;3)$ un point et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur donné. On note d la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit $M(x,y)$ un point de d.

1. Que peut-on dire du produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}$?
2. Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$, déduire de la question précédente : $x-2y+4=0$ Cette equation est donc une équation cartésienne de d.
3. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de d.
4. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}$.
5. Calculer la distance entre le point $V\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ et la droite d.

Exercice 33

Soit Δ une droite d'équation cartésienne $3x-y-3=0$.

1. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de Δ.
2. Trouver l'équation de la perpendiculaire à Δ passant par A.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sur la droite Δ
4. Déterminer la distance entre M et Δ.

2.1.2 Équation de cercles.

Exercice 34

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $A(2;3)$ et de rayon 5. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$.

1. Quelle la valeur de AM^2 ?
2. Sachant que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$, déduire de la question précédente : $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ Cette équation sera appelée l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 35

On considére l'équation : $x^2-10x+y^2+2y+20=0$

1. Développez $(x-5)^2+(y+1)^2$
2. En déduire que $x^2-10x+y^2+2y+20=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+1)^2=81$
3. En déduire la nature de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifie l'équation $x^2-10x+y^2+2y+20=0$.

Exercice 36

Soient $A(-4;-1)$ et $B(14;-1)$, et $M(x,y)$ un point du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. Avec la formule analytique du produit scalaire, déterminer l'équation vérifiée par les coordonnées du point M.
2. Conclure en utilisant l'exercice précédent.

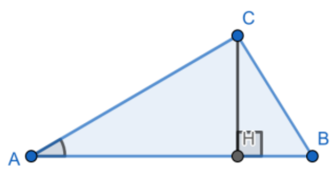
2.1.3 Triangle et produit scalaire.

Relations métriques dans le triangle.

Exercice 37

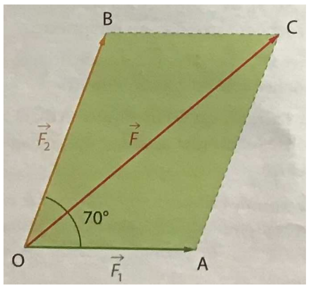
On considère un triangle ABC, on note H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On $AC=8$, $AB=10$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{6}$.

1. En vous plaçant dans le triangle rectangle ACH déterminer la longueur CH.
2. En déduire la surface du triangle ABC.
3. Cadre général (en supposant que l'on connait aucune longueur)
   (a) Justifier que $CH = AC \times \sin\widehat{A}$.
   (b) En déduire $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$
   (c) Déduire de la relation précédente, deux autres expressions de S avec les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC.



Exercice 38

On observe sur la figure que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. On donne $||\overrightarrow{F_1}|| = 150$, $||\overrightarrow{F_2}|| = 220$ et $\widehat{AOB} = 70°$.



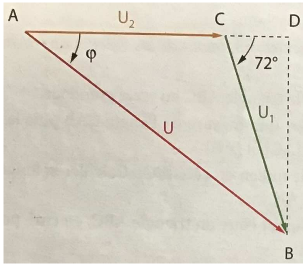
1. Déterminer la mesure en degrès de l'angle $\widehat{OAC}$.

2. À l'aide de la formule d'Al-Kashi, calculer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la distance $OC = ||\overrightarrow{F}||$.

3. En utilisant la relation des sinus dans un triangle, déterminer une valeur approchée arrondie à un demi-degré, de la mesure en degrès α de l'angle $\widehat{AOC}$

Exercice 39

La figure est issue d'une situation rencontrée en physique. On donne $||\overrightarrow{BC}|| = U_1 = 25$, $||\overrightarrow{AC}|| = U_2 = 20$ et $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) = -72°$.



1. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} de la mesure de φ

2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la mesure φ en degrés de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$.

Formules d'addition et d'angles doubles.

Exercice 40

On définit $A(\cos a, \cos b)$ et $B(\cos b, \sin b)$, alors A et B sont sur le cercle trigonométrique et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) = a$, $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = b$ et enfin $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = b - a$ (relation de Chasles pour les angles orientés).

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en utilisant la formule obtenue à partir des coordonnées des vecteurs.

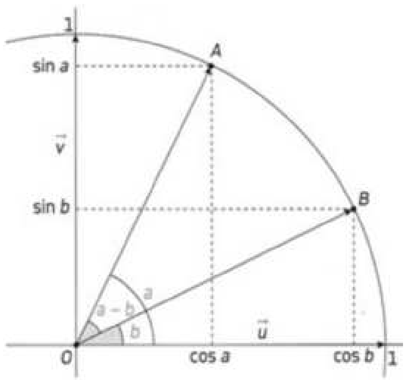
2. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en utilisant la formule avec le cosinus.

3. En déduire que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

4. En déduire une expression de $\cos(a + b)$

5. En utilisant la formule $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, trouvez une expression de $\sin(a - b)$ puis de $\sin(a + b)$.

6. En posant $a = b$ déterminer une expression de $\cos 2a$ et de $\sin 2a$ à partir des formules précédentes.

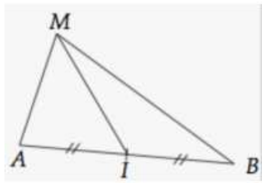


Théoréme de la médiane.

Exercice 41

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$ et I le milieu du segment $[AB]$ et M un point quelconque du plan.

1. Déterminer $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.
2. Montrer que :
$$MA^2 + MB^2 = MI^2 + IA^2 + IB^2$$
Indication : On utilisera la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ *et* $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$
3. Montrer que $IA^2 + IB^2 = \dfrac{1}{2}AB^2$
4. En déduire :
$$MA^2 + MB^2 = MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



2.2 Dans l'espace

Exercice 42

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne les trois points $B(1, -1, -1)$, $C(0, -3, 1)$ et $D(-4, 1, 3)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$. En déduire une mesure en degés de l'angle $\widehat{BHC}$.

Exercice 43

Dans un repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Calculer :

1. $\|\overrightarrow{u}\|$
2. $\|\overrightarrow{v}\|$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
4. θ

Exercice 44

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1$. Calculer :

1. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{v} \cdot (-\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})$
3. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
4. $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$

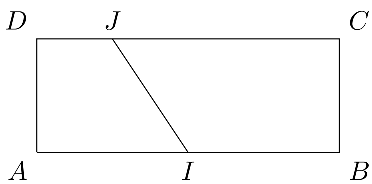
Exercice 45

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$.

Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$



Exercice 46

Dans un repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(1\,;-2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;0)$.

Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles : $\widehat{ABC}$; $\widehat{BAC}$; $\widehat{ACB}$.

Exercice 47

Retrouver les valeurs manquantes.

$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$\|\vec{u}+\vec{v}\|$	$\|\vec{u}-\vec{v}\|$
	3	2	4	
5	2			$\sqrt{3}$
8	3	4		

Exercice 48

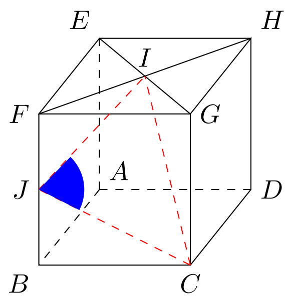
Dans un tétraèdre $HARU$, on donne $HA = 2$, $HR = 3$ et $AR = 4$.

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HR}$
2. En déduire une mesure arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{RHA}$

Exercice 49

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.

On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

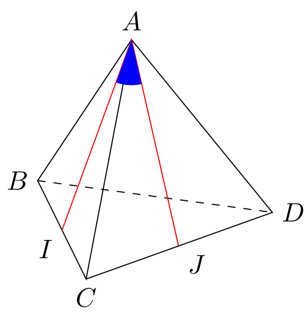


1. Méthode géométrique
   (a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$.
   (c) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
2. Autre méthode géométrique
   (a) Calculer $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
3. Méthode analytique
   (a) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, calculer analytiquement $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI}$.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
4. Quelle est la méthode :
   (a) qui demande le moins / le plus de connaissances théoriques ?
   (b) la moins / la plus rapide ?

Exercice 50

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2.

Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1. (a) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
   (b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

2.2.1 Orthogonalité

Exercice 51

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Exercice 52

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 53

Même exercice avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k+1\\-k\\2\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 54

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 55

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les quatre points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;3\,;1)$ et $D(-8\,;2\,;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

2.2.2 Équation cartésienne de plan

Exercice 56

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 57

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $A(1\,;4\,;-5)$ et le vecteur $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$
2. $A\left(\sqrt{2}\,;2\,;-\sqrt{3}\right)$ et le vecteur $\vec{n}=\sqrt{3}\,\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$

Exercice 58

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

1. $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$
2. $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$
3. $A(5\,;-3\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$
4. $A(2\,;-1\,;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i}-\dfrac{3}{2}\vec{j}$

Exercice 59

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ lorsque :

1. $A(2\,;1\,;0)$ et $B(-4\,;-1\,;3)$
2. $A(4\,;-5\,;6)$ et $B(1\,;-1\,;1)$
3. $A(2\,;-1\,;0)$ et $B\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{2}{3}\,;1\right)$
4. $A(1\,;0\,;0)$ et $B(1\,;0\,;0)$

Exercice 60

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}_2)$, parallèle au plan $(\mathcal{P}_1)$ et passant par le point A lorsque :

1. $(\mathcal{P}_1) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$
2. $(\mathcal{P}_1) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3\,;0\,;-1)$
3. $(\mathcal{P}_1) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{1}{6}\right)$
4. $(\mathcal{P}_1) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1\,;1\,;-1)$

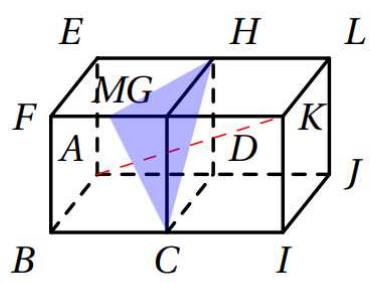
Exercice 61

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

1. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$
2. $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$
3. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1\,;-2\,;3)$
4. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2\,;4\,;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

Exercice 62

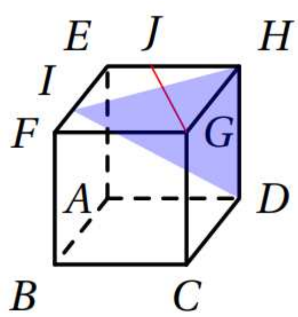
On considère la figure suivante, dans lequel la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (MHC).
2. Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

Exercice 63

On considère la figure suivante, dans lequel la droite (GJ) est orthogonale au plan (IHD). En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (IHD).



Exercice 64

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les trois points $A(-1\,;-1\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(0\,;1\,;1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

Exercice 65

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $A(5\,;-4\,;1)$, $B(6\,;3\,;9)$ et $C(-8\,;1\,;7)$
2. $A(3\,;4\,;5)$, $B(4\,;-2\,;7)$ et $C(5\,;-8\,;9)$
3. $A(-1\,;7\,;4)$, $B(-2\,;10\,;5)$ et $C(3\,;6\,;-1)$

2.2.3 Intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 66

Dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbb{R}$$

et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne : $-2x-3y+z-6=0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathcal{P})$.

Exercice 67

Même consigne que précédemment avec la droite (d) : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-2s \\ y & = & 2-s \\ z & = & -3+5s \end{array}\right. ,\quad s\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathcal{P}) : -x-5y-z-6=0$

Exercice 68

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite(d) : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6+t \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -3-t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathcal{P}) : x+y+3z-1=0$.

Exercice 69

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) engendrée par $A(6\,;-2\,;-3)$ et $\overrightarrow{u}=5\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-6\overrightarrow{k}$ et le plan $(\mathcal{P}) : -5x-7y+10z+6=0$.

Exercice 70

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) passant par les points $A(1\,;2\,;-1)$ et $B(2\,;4\,;1)$ et le plan $(\mathcal{P}) : -\frac{4}{5}x-\frac{1}{10}y+\frac{1}{2}z-2=0$.

Exercice 71

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec le plan $(\mathcal{P}) : 4x-6y+5z-3=0$ et :

1. l'axe des abscisses
2. l'axe des ordonnées
3. l'axe de la hauteur

Exercice 72

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) passant par les points $A(2\,;-5\,;3)$ et $B(-2\,;4\,;-8)$ et le plan $(\mathcal{P})$ passant par $C(4\,;-1\,;2)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2.2.4 Intersection de deux plans

Exercice 73

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Exercice 74

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

Exercice 75

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

Exercice 76

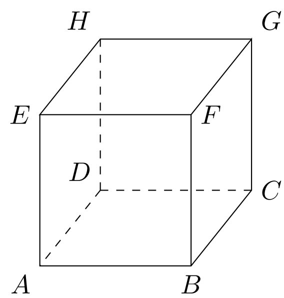
Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

Exercice 77

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points $M\left(1\,;1\,;\dfrac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\dfrac{5}{4}\right)$.



1. (a) Reproduire la figure et placer les point M, N et P.

   (b) Démontrer que ces points ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M.

3. (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$, normal au plan (MNP).

   (b) En déduire une équation cartésienne de ce plan.

   (c) Soit (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Donner une équation paramétrique de (Δ).

   (d) Soit K le point d'intersection de (MNP) et (Δ). Démontrer que $K\left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{24}{35}\,;\dfrac{23}{35}\right)$.

   (e) En déduire le volume du tétraèdre $FMNP$.

2.2.5 Projection orthogonale

Exercice 78 (Distance d'un point à un plan)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$, on considère un plan $(\mathcal{P})$ et un point A.

Soit M un point appartenant à $(\mathcal{P})$. Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

1. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

   (a) Faire un schéma.

   (b) De quelle droite et de quel plan le point H est-il l'intersection ?

   (c) Démontrer que si M est un point de $(\mathcal{P})$ différent de H, alors $AM > AH$.
   La distance de A à $(\mathcal{P})$ est donc la distance AH.

2. Soit $(\mathcal{P}) : x - 2y - 2z - 31 = 0$ et $A(2\,;1\,;-2)$.
   (a) Donner un vecteur directeur de (AH).
   (b) En déduire les coordonnées du point H puis la distance de A à (P).

Exercice 79

Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

1. $M(7;-2;6)$ et $\mathcal{P} : -x + y + 3z + 2 = 0$
2. $M(5;2;-3)$ et $\mathcal{P} : x + 2y - z + 3 = 0$
3. $M(-1;-2;-1)$ et $\mathcal{P} : x + y + 2z - 2 = 0$

Exercice 80

On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t \\ z = 2t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur la droite d.

1. $M(2;2;-2)$
2. $M(1;1;1)$
3. $M(2;4;2)$
4. $M(0;1;0)$

Exercice 81

On considère la droite δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t \\ z = 2t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, donner la distance entre le point M et la droite δ.

1. $M(-1;0;1)$
2. $M(-1;0;7)$
3. $M(3,8;1,1;5,5)$
4. $M(-25;-7;10)$

Exercice 82

Donner la distance entre le point M et le plan $\mathcal{P}$

1. $M(3;4;1)$ et $\mathcal{P} : 2x + -2y + z + 4 = 0$
2. $M(4;\sqrt{5};4)$ et $\mathcal{P} : -4x + \sqrt{5}y + 2z + 13 = 0$
3. $M(1;1;1)$ et $\mathcal{P} : x + y + z = 0$

Exercice 83

Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c, et d sont des réels, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. On considère un point $M(x;y;z)$ appartenant au plan $\mathcal{P}$ et on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$.
2. En utilisant la formule du cosinus, exprimer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$. Que peut-on dire de l'angle $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n}\right)$?
3. En déduire que $\left|\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}\right| = AH \times \|\overrightarrow{n}\|$.
4. En remarquant que $d = -ax - by - cz$, simplifier l'expression analytique de $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$.
5. En déduire une expression de la distance de A à $\mathcal{P}$.

Exercice 84

Dans le cube $ABCDEFGH$, soit le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. On note K le centre du carré $ABFE$.

1. Justifier que le plan (ACE) admet pour équation $x - y = 0$.
2. Calculer les coordonnées de H le projeté orthogonal du point K sur le plan (ACE)

Exercice 85

On considère les points $R(1;0;0)$, $I(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $N(1;1;1)$.

1. Justifier que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation du plan (RIE).
2. Déterminer les coordonnées de J, projeté orthogonal du point N sur le plan (RIE).
3. Montrer que J est le centre de gravité de RIE.

Exercice 86

On considère les points $F(0;-1;1)$, $G(2;-1;3)$ et $H(4;-5;3)$ et un plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z + 3 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées de P, Q et R, projeté orthogonaux respectifs des points F, G et H sur le plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$.
3. Peut-on dire que la projection orthogonale conserve les angles ? Justifier.

Exercice 87

Soient $E(-2,5;0,5;-1)$, $D(3;4;3)$ et $F(2;-1;5)$ trois points de l'espace et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-9\\5\\8\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$.
2. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (EDF).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de E sur la droite (DF).
4. En déduire l'aire du triangle EDF.

3 Produit vectoriel et produit mixte

Exercice 88

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

1. Simplifier les expressions suivantes :

   a) $(2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})$

   b) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

   c) $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \wedge (2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$

   d) $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \wedge (2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v})$

2. Montrer que : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$

3. On suppose maintenant que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Montrer que pour tous réeles a, b, c et d on a : $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}$ et $c\overrightarrow{u}+d\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $ad-bc=0$. On retrouve ici le déterminant d'une matrice 2×2.

Exercice 89

Dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}+2\\ \sqrt{3}+2\\ -4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\sqrt{3}+1\\ 3\sqrt{3}+1\\ -2\end{pmatrix}$.

Déterminer une la valeur de $|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$. Peut-on en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$?

Exercice 90

Dans un espace rapporté à un repère orthonoré direct,

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ 1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ 3\sqrt{2}+1\\ 3+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

   a Calculer $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$

   b Qu'en déduit-on pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

2. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace. Calculer $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$. Conclure.

3. Soient les points $A(2,0,2)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,3)$ de l'espace.

   a Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

   b Qu'en déduit-on ?

Exercice 91

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$. Donner deux vecteurs $\overrightarrow{w}$ tels que $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}$

Exercice 92

1. On donne le point $A(-3,5,2)$ et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

   a Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

   b Écrire une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

2. Soient $B(1,2,1)$, $C(3,-1,1)$ et $D(-1,0,2)$ trois points de l'espace.

   a Vérifier que B, C et D ne sont pas alignés.

   b Écrire une équation cartésienne du plan passant par les points B, C et D.

Exercice 93

1. Calculer la distance du point $B(1,2,-1)$ à la droite $\mathcal{D}$ paramétrée par $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3t\\ y & = & 2-t\\ z & = & 2t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}$

2. Calculer la distance du point $C(1,0,2)$ à la droite Δ définie par $(\Delta) : \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 1\\ x-y+z & = & -1\end{array}\right.$,

Exercice 94

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $x - y + z + 1 = 0$ et $2x + y - z - 1 = 0$

1. Vérifier que ces deux plans ne sont parallèles.
2. Déterminer une paramétrisation de leur intersection $\mathcal{D}$.
3. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ passant par $A = (1, 1, 0)$ et perpendiculaire aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Exercice 95

Pour chacun des plans $\mathcal{P}$ suivant calculer une équation cartésienne et une équation paramétrique.

1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, -1, 1)$ et perpendicualire à la droite $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 1 & = & 0 \\ x - y + z - 2 & = & 0 \end{array}\right.$,
2. Le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ y + z - 2 & = & 0 \end{array}\right.$, et $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3 + t \\ y & = & 2 - t \\ z & = & 2 - 2t \end{array}\right.$,
3. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, 0, 0)$ et perpendicualire aux plans $\mathcal{Q} : x - 2y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q}' : y - 2z + 1 = 0$.
4. Le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1, 0, -2)$ et $B(0, -1, 1)$ et perpendicualire au plan $\mathcal{Q} : x - y + z = 1$

Exercice 96

Soient A et B deux points de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espcae tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espcae tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$
3. Déterminer l'ensemble des points M de l'espcae tels que $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$

Exercice 97

Soient $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -1; 0)$, $C(0; 0; -2)$.

1. Quelle est l'aire du triangle ABC ?
2. Déterminer une équation du plan (ABC) à l'aide du produit vectoriel.

Exercice 98

1. Déterminer si les quatre points de l'espace $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace.
   Quel est le volume du parallélépipède construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$?
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendant ? Quelles informations supplémentaires pouvez-vous calculer ?

Exercice 99

Déterminer en utilisant le produit mixte une équation du plan (PQR) avec $P(2; -1; 1)$, $Q(3; 2; -1)$, $R(-1; 3; 2)$.

Exercice 100

Soit O un point de l'espace et $\overrightarrow{F}$ une force appliquée à un point A d'un solide indéformable. On appelle moment de force $\overrightarrow{F}$ au point O et on note $M_O(\overrightarrow{F})$, le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}$.

1. La droite (d) définie par $(A, \overrightarrow{F})$ est appelée support de la force.

   a Soit H le projeté orthogonal de O sur (d), montrer que $||M_O(\overrightarrow{F})|| = OH.||\overrightarrow{F}||$.

   b En déduire que deux forces de même vecteur et de même support ont même moment en tout point de l'espace.

2. Soit O' un point de l'espace, montrer que le moment de $\overrightarrow{F}$ en O' est égal à la somme du moment de $\overrightarrow{F}$ en O et du vecteur $\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

3. Montrer que si trois forces ont une résultante nulle et si le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point quelconque de l'espace, alors les supports des forces sont coplanaires.