# Sommaire



# 1 Dénombrements

**Exercice 1 (Podium !)**

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

**Exercice 2 (Les boulangeries)**

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

**Exercice 3 (Autour d'une table)**

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4.

Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

**Exercice 4 (Le cadenas)**

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

**Exercice 5 (Tirages dans un jeu de cartes)**

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. contenant 2 carreaux et 3 piques.
4. contenant au moins un roi.
5. contenant au plus un roi.
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

# 2 Probabilité

## 2.1 Variable aléatoire et loi de probabilité

**Exercice 6**

Marouane et Fernando jouent au jeu suivant : Fernando lance une pièce de monnaie « normale » et Marouane gagne 10 euros si le résultat est pile et perd 5 euros si le résultat est face.

On peut définir la variable aléatoire $X$ égale au gain algébrique (gain ou perte) de Marouane après un lancer.

Quelles valeurs, $x_1$ et $x_2$, peut prendre $X$ ?

On présente en général la loi de probabilité de $X$ dans un tableau :

Remplir le tableau

| $x_i$ | | |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | | |

**Exercice 7**

On mise 1 euros et on tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- si on a une paire d'as, on gagne 50 euros ;
- si on a une paire de figures (valet, dame ou roi), on gagne 10 euros ;
- si on a une autre paire on gagne 5 euros ;
- si les deux cartes sont de la même couleur, on récupère notre mise ;
- dans tous les autres cas, la mise est perdue

On note $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique lors d'un tirage.

1. Combien y-a-t-il de mains de 2 cartes possibles ?
2. Calculer les probabilités de tirer une paire d'as, une paire de figures, ... et donner la loi de probabilité de $X$ sous forme de tableau.

**Exercice 8**

Une machine à sous au casino se compose de 3 tambours cylindriques. Sur chacun d'eux peut apparaître de façon aléatoire et équiprobable l'un des quatres symboles : un 7, un citron, un kiwi, ou une banane.

1. Quel est le nombre total de combinaisons que l'on peut obtenir ?
2. On mise au départ 5 € :
   - si trois 7 apparaissent, on gagne vingt fois la mise de départ ;
   - si trois fruits identiques apparaissent, on gagne dix fois la mise départ ;
   - si deux 7 seulement apparaissent, on gagne deux fois la mise de départ ;
   - dans tous les autres cas, on ne gagne rien.
3. On note $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique lors d'une partie. Donner la loi de probabilité de $X$.

## 2.2 Espérance mathématique, variance et écart-type

**Exercice 9**

La loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ est donnée par le tableau :

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,25$ | $0,05$ | | $0,15$ |

1. Calculer $p(X > 0)$
2. Calculer l'espérance mathématique de $X$, sa variance et son écart type.

**Exercice 10**

1. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire du jeu des exercices 6, 7 et 8.

   Interpréter ces résultats.

2. On dispose d'une somme de départ de 200 €. Combien peut-on espérer gagner à chacun de ces jeux ?

**Exercice 11**

On considère les deux jeux suivants :

1. On lance une pièce et on gagne 1 euro si on obtient face et on perd 1 euro si on obtient pile.

2. On lance une pièce et on gagne 1 000 000 euro si on obtient face et on perd 1 000 000 euro si on obtient pile.

On appelle « jeu équitable » un jeu dont l'espérance de la variable aléatoire représentant le gain est nulle.

Ces jeux sont-ils équitables ? Lequel des deux est le plus « risqué » ?

## 2.3 Probabilités conditionnelles et événements indépendants

**Exercice 12**

Un sondage auprès de clients d'un magasin a donné les préférences suivantes, en fonction de la catégorie d'âge.

« Avoir moins de 30 ans » et « préférer les films » sont-ils indépendants ?

| Préférence / Age | Films | Séries |
|---|---|---|
| Moins de 30 ans | 120 | 150 |
| Plus de 30 ans | 220 | 260 |

**Exercice 13**

Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a, indépendamment des autres, une probabilité de 0,2 de tomber en panne.

Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne ?

**Exercice 14**

Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats approchés sont à arrondir à $\mathbf{10^{-3}}$.

Un grand constructeur d'engins de travaux publics sous-traite la fabrication de chenilles et de pneumatiques à deux entreprises.

Dans la première entreprise, les pneumatiques produits sont soumis à un controle de qualité constitué de deux tests.

On prélève au hasard un pneumatique après controle.

On considère les événements suivants :

$\boldsymbol{A}$ : « le pneumatique a validé le premier test » ;

$\boldsymbol{B}$ : « le pneumatique a validé le second test ».

Un pneumatique est dit conforme s'il a validé les deux tests.

Une étude statistique permet d'admettre que les probabilités des événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont respectivement $\boldsymbol{P(A) = 0,98}$ et $\boldsymbol{P(B) = 0,85}$ et que les événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants.

Calculer les probabilités des événements suivants :

1. $\boldsymbol{E_1}$ : « le pneumatique controlé est conforme » ;
2. $\boldsymbol{E_2}$ : « le pneumatique controlé n'est pas conforme » ;
3. $\boldsymbol{E_3}$ : « le pneumatique n'a validé qu'un seul des deux tests. ».

**Exercice 15**

Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, et l'autre de type électrique.

Un moteur est rejeté s'il présente au moins l'un des deux types de défaut. Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux types de défaut.

Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :

- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est 0,08 ;
- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est 0,05 ;
- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est 0,02.

On prélève au hasard un moteur dans la production. On note les événements $D_M$ :« le moteur prélevé présente un défaut de type mécanique », et $D_E$ :« le moteur rélevé présente un défaut de type électrique ».

1. a) Les événements $D_M$ et $D_E$ sont-ils indépendants ?

   b) Calculer la probabilité de l'événement $D_M$ sachant que l'événement $D_E$ est réalisé.

2. a) Calculer la probabilité de l'événement $A$ : « le moteur prélevé présente au moins un défaut ».

   b) Démontrer que la probabilité de l'événement $B$ : « le moteur prélevé est en parfait état de marche » est de 0,89.

   c) Déterminer la probabilité de l'événement $C$ : « le moteur prélevé présente un seul défaut. »

# 3 Applications

**Exercice 16**

Un client reçoit, en cadeau, un ticket d'un jeu de grattage. Sur chaque ticket figurent trois cases à gratter. Pour chacune des deux premières cases, il est possible d'obtenir les lettres A, B ou C. Pour la dernière case, seules les lettres A ou B peuvent être obtenues.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

   E : « obtenir trois lettres identiques »
   G : « obtenir trois lettres distinctes »
   F : « obtenir au plus un A »
   H : « obtenir au moins un C »

2. Calculer la probabilité de l'événement $H \cap F$ . En déduire celle de l'événement $H \cup F$ .

**Exercice 17**

Une urne contient cinq boules rouges, trois vertes et deux bleues. On tire au hasard deux boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ? une rouge et une bleue ? deux boules de même couleur ?

**Exercice 18**

Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un type de comprimés. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 1,2 et 1,3 gramme. La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98. On prélève un comprimé dans la production et on vérifie sa conformité. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98
- un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

On note $C$ l'événement : « le comprimé prélevé est conforme » et $R$ l'événement : « le comprimé prélevé est refusé »

1. Calculer la probabilité qu'un comprimé soit refusé.
2. Calculer la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il a été refusé.
3. Calculer $P_{\overline{R}}(C)$ . Que peut-on penser du contrôle de ces produits pharmaceutiques ?

**Exercice 19**

Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut $\alpha$ sur 2% des composants et la seconde un défaut $\beta$ sur 4% des composants. On prélève au hasard un composant dans la production. On note : A : « le composant présente le défaut $\alpha$ » et B : « le composant présente le défaut $\beta$ ». Calculer à $10^{-4}$ près les probabilités suivantes :

1. le composant présente les deux défauts ;
2. le composant ne présente aucun des deux défauts ;
3. le composant présente au moins un des deux défauts ;
4. le composant présente un et un seul défaut.

**Exercice 20**

Une urne contient deux jetons rouges numérotés 1 et 2, trois jetons bleus numérotés 1, 2 et 3 et un jeton blanc numéroté 0. Un joueur tire simultanément deux jetons de l'urne, tous les résultats sont supposés équiprobables.
On appelle $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des nombres inscrits sur les deux jetons tirés.

1. a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente ?
   b) Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 3)$ sachant que les deux jetons tirés sont de couleur différente.
2. a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.
   b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de $X$.

**Exercice 21**

On dispose de deux dés cubiques non truqués. Le premier cube a cinq faces rouges et une face verte. Le deuxième cube a une face rouge, deux vertes et trois bleues.

1. On lance les deux dés (les dés sont distinguables) et on regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : « les deux faces sont rouges »
   - B : « les deux faces sont de la même couleur »
   - C : « l'une des faces est rouge et l'autre verte »
   - D : « les deux faces sont de couleurs différentes »
2. À chaque jet de ces deux dés, on associe un jeu qui permet :
   - de gagner 5 € si les deux faces sont rouges,
   - de gagner 2 € si les deux faces sont vertes,
   - de perdre une certaine somme notée $x$ si les deux faces sont de couleurs différentes.

   On définit ainsi une variable aléatoire $X$ qui, à chaque jet des deux dés, associe le gain (algébrique) réalisé. Calculer $x$ pour que le jeu soit équitable.

**Exercice 22**

Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à $0,65$.

1. Quelle est la probabilité pour que, sur 3 tirs, il touche le centre de la cible au moins une fois ?
2. Combien de tirs doit-il effectuer pour que la probabilité qu'il touche le centre de la cible au moins une fois soit supérieure à 0,999 ?

**Exercice 23**

Une entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les évènements suivants :

- A : « La chaudière est à cheminée » ;
- B : « La chaudière est à ventouse » ;
- D : « La chaudière présente un défaut ».

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(D|A)$ et $P(D|B)$.
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

**Exercice 24**

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.
Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.
Deux machines automatiques fabrique ces pièces, notée « machine 1 » et « machine 2 ». On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$. La machine 1 fournit 60% de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la mÃªme probabilité d'être tirées. On définit les évènements suivants :

- A : « la pièce provient de la machine 1 » ;
- B : « la pièce provient de la machine 2 » ;
- C : « la pièce est conforme ».

1. Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C|A)$ et $P(C|B)$. On rappelle que $P(C|A)$ est la probabilité de l'évènement $C$ sachant que l'évènement A est réalisé.
2. En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.
3. En remarquant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer $P(C)$.