

Sommaire

1	Lois d'échantillonnage	2
2	Estimation ponctuelle	3
3	Intervalle de confiance	4
3.1	Intervalle de confiance d'une moyenne	4
3.2	Intervalle de confiance d'une fréquence	4
4	Extraits de BTS	5
5	Test Bilatéral	6
5.1	Par rapport à une moyenne	6
5.2	Par rapport à une fréquence	7
6	Test unilatéral	7
6.1	Par rapport à une moyenne	7
6.2	Par rapport à une fréquence	8
7	Test de comparaison	8
7.1	Comparaison de deux fréquences	8
7.2	Comparaison de deux moyennes	10

1 Lois d'échantillonnage

Exercice 1

Supposons que les poids de 3000 étudiants d'une université sont distribués normalement avec une moyenne de 68 kg et un écart-type de 3 kg. On tire 80 échantillons de 25 étudiants chacun.

1. Quelles sont les valeurs espérées de la moyenne et de l'écart-type de la distribution d'échantillonnage résultante si le tirage des échantillons se fait avec remise ?
2. Dans combien d'échantillon peut-on s'attendre à trouver une moyenne comprise entre 66,8 et 68,3 kg ?
3. Dans combien d'échantillon peut-on s'attendre à trouver une moyenne inférieure à 66,4 kg ?

Exercice 2

Une usine produit des billes de roulements. Ces billes ont un poids moyen de 5,02 g et un écart-type de 0,30 g. Quelle est la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 100 billes choisies au hasard présente un poids total :

1. compris entre 496 et 500 g ?
2. supérieur à 510 g ?

Exercice 3

La machine à embouteiller a été mal réglée, une bouteille sur deux, en moyenne, ne comporte pas de capsule. Quelle est la probabilité pour que, dans une série de 120 bouteilles, la proportion de bouteilles sans capsule soit :

1. comprise entre 40 et 60% ?
2. de $5/8$ ou plus ?

Exercice 4

La machine à embouteiller a été mal réglée, une bouteille sur deux, en moyenne, ne comporte pas de capsule. Un container contient 500 lots de 120 bouteilles. Estimer les lots contenant un nombre de bouteilles sans capsule :

1. compris entre 40 et 60% ?
2. de $5/8$ ou plus

Exercice 5

Un candidat aux élections a recueilli 46% des votes.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un groupe de 200 personnes choisies au hasard lui ait donné une majorité ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un groupe de 1000 personnes choisies au hasard lui ait donné une majorité ?

Exercice 6

Les lampes fabriquées par un industriel A ont une durée de vie moyenne de 1400 h avec un écart-type de 200h, tandis que celles fabriquées par un industriel B ont une durée de vie moyenne de 1200h avec un écart-type de 100h.

Si l'on teste des échantillons aléatoires de 125 lampes de chaque marque, quelle est la probabilité pour que les lampes A aient une durée moyenne de vie :

1. au moins supérieure de 160 h aux lampes B ?
2. au moins supérieure de 250 h aux lampes B ?

Exercice 7

Les billes de roulement d'une marque donnée pèsent en moyenne 0,50 g avec un écart-type de 0,02 g. Quelle est la probabilité pour que les poids de deux lots de 1000 billes chacun différent de plus de 2 g ?

Exercice 8

Une marque donnée de lampes électriques a une durée de vie moyenne de 1500 heures avec un écart-type de 150 heures. Trois lampes sont connectées de manière telle que si l'une d'entre elles claque, une autre s'allume. En supposant que les durées de vie sont normalement distribuées, quelle est la probabilité pour que l'éclairage dure :

1. au moins 5000 heures ?
2. au plus 4200 heures ?

2 Estimation ponctuelle

Exercice 9

Une entreprise possède 12% des parts de marché sur un de ses produits. Elle souhaite mieux se positionner sur ce produit et lance donc une vaste campagne publicitaire.

Pour vérifier rapidement l'efficacité de cette campagne, elle procède à une étude auprès de 50 clients potentiels. 18 d'entre eux sont clients du produit de l'entreprise.

Peut-on considérer que la campagne a eu un impact positif ?

Exercice 10

Une entreprise utilise des camions pour transporter sa production. Elle dispose de 100 camions. Elle repère sur un échantillon de 30 jours choisis au hasard le nombre de camions en panne.

Voici les résultats : 5 5 6 4 6 6 8 3 5 5 5 4 3 6 5 6 4 7 6 6 5 4 3 6 5 4 5 4 5 5

1. Calculer la moyenne \bar{x} et l'écart type s du nombre de camions en panne chaque jour pour l'échantillon étudié.
2. À partir des résultats obtenus pour cet échantillon, proposer une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ du nombre de camions en panne chaque jour pour la population correspondant aux jours ouvrables de l'année.

Exercice 11

Un client réceptionne un lot de 500 tubes. On prélève un échantillon de 36 tubes dans ce lot. On a les résultats :

Longueur des tubes (en mm)	[990; 994[[994; 998[[998; 1002[[1002; 1006[[1006; 1010[
Nombres de tubes	3	7	9	9	8

En supposant que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer les valeurs approchées de la moyenne et de l'écart type de l'échantillon des 36 tubes. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart type du lot de 500 tubes.

Exercice 12

Un sondage a été effectué dans une entreprise sur un échantillon de 80 personnes tirées au hasard parmi les 1319 salariés. 52 personnes se sont déclarées satisfaites de la cantine.

1. Quelle estimation ponctuelle de la proportion des salariés de l'entreprise satisfaits de la cantine est fournie par cet échantillon ?
2. Même question avec 65 personnes satisfaites dans un échantillon de 95 personnes.

3 Intervalle de confiance

3.1 Intervalle de confiance d'une moyenne

Exercice 13

Nous étudions un caractère d'une population dont la moyenne m est inconnue et l'écart type $\sigma = 0,31$.

On prend un échantillon de taille $n = 100$, sa moyenne est $m_e = 5,2$.

Trouver un intervalle contenant m avec une confiance de 95 %.

Exercice 14

D'un contrôle journalier, effectué à la sortie d'un chaîne de fabrication de billes en acier sur un échantillon de 900 billes, il ressort que leur poids suit une loi normale de moyenne $m_e = 62,33$ mg et d'écart type $\sigma_e = 6,54$ mg.

1. Estimer l'écart type théorique de la production journalière.
2. Estimer le poids moyen de la production journalière par un intervalle de confiance symétrique au niveau de 95%.

Exercice 15

On fabrique des pièces en série. Leur diamètre est une variable aléatoire normale de moyenne $m = 32$ mm et d'écart type $\sigma = 0,5$.

Pour contrôler la fabrication, on prélève, à intervalles réguliers 20 pièces.

1. Entre quelles limites doit-être situé la moyenne m_e de cet échantillon pour que la machine puisse être considérée comme bien réglée au seuil de 99 % ?
2. Les pièces sont considérées comme utilisables si leur diamètre est compris dans l'intervalle $[31 ; 33]$. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit utilisable ?

3.2 Intervalle de confiance d'une fréquence

Exercice 16

Soit p le pourcentage des oeufs extra frais dans la livraison hebdomadaire d'un supermarché. Dans un échantillon de 100 oeufs on a constaté que 76 d'entre eux possédaient cette qualité. En déduire un intervalle de confiance de p , de centre 76 avec un coefficient de 98 %.

Exercice 17

Un sondage est réalisé sur les intentions de vote des électeurs ayant le choix entre deux candidats A et B. Ce sondage réalisé sur un échantillon représentatif de 1000 personnes révèle que 48,5 % des électeurs vont voter pour A.

1. Déterminer au seuil de risque de 5 %, une estimation par intervalle de confiance des suffrages obtenus par les deux candidats A et B.
2. Que pouvez-vous en conclure sur le résultat de cette élection ?

Exercice 18

Une usine fabrique chaque semaine 10000 bouteilles en plastique destinées à contenir de l'eau de source.

Le service qualité en prélève 100 par jour pour en contrôler la qualité. En fin de semaine, sur 500 bouteilles contrôlées, 65 présentent un défaut.

On note p la fréquence inconnue de bouteilles ayant un défaut sur la production de la semaine et f_e la fréquence observée dans l'échantillon.

1. Déterminer un intervalle de confiance de p au seuil de confiance de 98 %.
2. En déduire un encadrement du nombre probable de bouteilles défectueuses dans la production de la semaine.

4 Extraits de BTS

Exercice 19

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif. On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

1. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
2. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

On suppose que F suit la loi normale $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$ où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante :
« le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b. »
Est-elle vraie ? On ne demande pas de justification.

Exercice 20

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des tiges, exprimé en millimètres.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tiges dans la production d'une journée.

Soit \bar{D} la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production d'une journée, associe la moyenne des diamètres des tiges de cet échantillon.

On suppose que \bar{D} suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0,19$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2} est $\bar{x} = 9,99$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des diamètres des tiges produites dans cette journée.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur \bar{x} de la moyenne μ des diamètres des tiges produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95 %.
3. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2 ».

Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification).

5 Test Bilatéral

5.1 Par rapport à une moyenne

Exercice 21

La farine est classée selon des « types » définis en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présent dans la farine. Cette teneur en matière minérale est obtenue par une analyse qui consiste à brûler la farine et à peser le résidu : « les cendres ». Plus la farine est blanche, plus le taux de cendres est faible. Quelques exemples de types de farine courants sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T 55	entre 0,5 et 0,6	Farine blanche
T 65	entre 0,62 et 0,75	Farine bise
T 80	entre 0,75 et 0,9	Farine semi-complète
T 110	entre 1 et 1,2	Farine complète

Le problème porte sur l'étude de la production de la farine semi-complète d'une minoterie.

Une nouvelle qualité de blé est utilisée dans la minoterie pour fabriquer de la farine semi-complète. Afin de procéder à d'éventuels réglages des machines, on veut tester si la moyenne m de la masse des résidus des prélèvements de 100 g de farine est toujours de 825 mg.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral. On suppose que la variable aléatoire \bar{Z} , qui, à tout prélèvement de 50 paquets choisis au hasard dans la production utilisant la nouvelle qualité de blé, associe la moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet, suit une loi normale d'espérance m et d'écart type 4,6.

On choisit l'hypothèse nulle $H_0 : m = 825$.

1. Préciser l'hypothèse alternative H_1 .
2. Calculer le réel h tel que $P(825 - h \leq \bar{Z} \leq 825 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève au hasard 50 paquets dans la production réalisée avec la nouvelle qualité de blé. La moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet est 860 mg.

Que peut-on conclure au risque de 5 % ?

5.2 Par rapport à une fréquence

Exercice 22

Une entreprise fabrique en grande série des pièces pour l'industrie.

Pour analyser la qualité de la fabrication, on effectue un test bilatéral permettant, à la suite du prélèvement au hasard d'un échantillon de $n = 64$ pièces dans la production, de tester au seuil de 5%, l'hypothèse H_0 selon laquelle la proportion f des pièces défectueuses dans la production est 0,04. L'hypothèse alternative H_1 est $f \neq 0,04$.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 64 pièces, associe la proportion des pièces défectueuses de cet échantillon. On assimile ces échantillons de 64 pièces à des échantillons aléatoires avec remise et on admet que, sous H_0 , F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(f, \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$ où $n = 64$ et $f = 0,04$. Les résultats sont à approcher à 10^{-3} .

1. Sous l'hypothèse nulle H_0 , déterminer le nombre réel a positif tel que $P(0,04 - a \leq F \leq 0,04 + a) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Pour un tel échantillon de 64 pièces on a trouvé cinq pièces défectueuses. Peut-on en conclure, au seuil de 5%, que la proportion des pièces défectueuses dans la production est bien de 0,04?

6 Test unilatéral

6.1 Par rapport à une moyenne

Exercice 23

Dans un centre d'assistance téléphonique, chaque client doit patienter avant d'être mis en relation avec un conseiller. Les clients se plaignant d'attendre trop longtemps, une enquête est alors effectuée sur un échantillon de 100 personnes pour vérifier la moyenne μ , exprimée en minutes, du temps d'attente.

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Temps d'attente en minutes	[0 ; 2[[2 ; 3[[3 ; 4[[4 ; 5[[5 ; 6[[6 ; 8[[8 ; 12[
Nombre de clients	13	16	19	17	15	15	5

On admet que la répartition du nombre de clients est régulière dans chacun des intervalles.

1. Calculer la moyenne \bar{d} de cet échantillon (on utilisera les centres des classes pour effectuer les calculs).
2. On veut construire un test unilatéral pour vérifier si le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4 minutes.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque client associe son temps d'attente, exprimé en minutes.

La variable D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 2,4$.

On désigne par \bar{D} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 client choisis au hasard associe la moyenne de leurs temps d'attente. Le nombre de clients est suffisamment élevé pour que l'on puisse assimiler ce choix de clients à un tirage avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$.

- (a) Déterminer l'hypothèse alternative H_1 .
- (b) Sous l'hypothèse H_0 , la variable aléatoire \bar{D} suit la loi normale de moyenne 4 et d'écart-type 0,24.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que : $P(\bar{D} \leq 4 + h) = 0,95$.
- (c) En déduire la règle de décision de ce test.
- (d) D'après l'échantillon étudié, peut-on au seuil de 5 % conclure que la moyenne des temps d'attente n'est pas supérieure à 4 minutes ?

6.2 Par rapport à une fréquence

Exercice 24

Une machine fabrique des tiges en grande série. La production étant importante on assimile tout prélèvement d'échantillon à un prélèvement avec remise.

La machine est supposée mal réglée quand la proportion des pièces acceptables est inférieure à 0,9. Pour contrôler le réglage de la machine, on construit un test permettant de décider si, au seuil de 4%, la machine est mal réglée et on prélève de temps en temps des échantillons aléatoires de 150 tiges.

1. Construction du test unilatéral

Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire de 150 tiges associe la proportion de tiges acceptables dans cet échantillon ;

On choisit pour l'hypothèse nulle $H_0 : p = 0,9$;

On choisit pour l'hypothèse alternative $H_1 : p < 0,9$;

On suppose que, sous H_0 , la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,9 et d'écart type 0,024.

- a) Déterminer le nombre réel h et l que, sous l'hypothèse H_0 , $P(F > h) = 0,95$. Arrondir à 10^{-4} .
- b) Énoncer la règle de décision de ce test.

2. Utilisation du test

- a) On prélève un échantillon aléatoire de 150 tiges. On trouve 22 tiges défectueuses. Quel est la proportion de tiges acceptables de cet échantillon ?
- b) En appliquant la règle de décision du test à cet échantillon, peut-on conclure, au seuil de 5%, que la machine est mal réglée et que l'on doit procéder à un réglage ?

7 Test de comparaison

7.1 Comparaison de deux fréquences

Exercice 25

Lors d'une campagne électorale, on a réalisé deux sondages. Lors du 1^{er} sondage, sur 2000 personnes, 1200 se sont prononcées pour le candidat A.

Lors du 2^e sondage, sur 1500 personnes, 825 se sont prononcées pour le candidat A.

Les deux sondages sont-ils compatibles au seuil de 5% ?

Exercice 26

Dans une grande ville, une importante entreprise de livraison de pizzas fait effectuer une enquête : dans un échantillon de 400 livraisons, on constate que 64 livraisons sont jugées trop tardives par les clients.

Après réorganisation du fonctionnement de l'entreprise un nouvel échantillon de 300 livraisons comporte encore 36 livraisons jugées trop tardives.

Le responsable de l'entreprise se pose alors deux questions :

La nouvelle organisation a-t-elle apporté un changement significatif?

La nouvelle organisation a-t-elle amélioré de façon significative les délais de livraison?

Dans la suite, on note p (respectivement p') la proportion inconnue de livraisons jugées trop tardives avant (resp. après) réorganisation.

On note de même f (respectivement f') la proportion de livraisons jugées trop tardives dans l'échantillon prélevé au hasard et avec remise.

On suppose que tous les échantillons intervenant ici peuvent être considérés comme prélevés au hasard et avec remise.

On note F (resp. F') la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 400$ (resp. $n' = 300$) prélevé avant (resp. après) réorganisation, associe sa proportion de livraison trop tardives.

On suppose que F (resp. F') suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ (resp. $\mathcal{N}\left(p', \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n'}}\right)$) et que F et F' sont indépendantes.

A) Test bilatéral de comparaison des proportions p et p' .

(a) Énoncer l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 ;

(b) On note D la variable aléatoire $D = F - F'$

a) Sous H_0 , déterminer l'espérance $E(D)$.

b) On prend $\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ et $\sqrt{\frac{f'(1-f')}{n'}}$ comme estimations ponctuelles des écarts types $\sigma(F)$ et $\sigma(F')$.
En déduire une estimation ponctuelle de l'écart type $\sigma(D) = \sqrt{\sigma(F)^2 + \sigma(F')^2}$. Arrondir à 10^{-3} .

(c) On admet que la variable aléatoire D suit une loi normale.

Déterminer la région critique du test bilatéral au seuil de 5%.

(d) Énoncer la règle de décision du test.

(e) Appliquer la règle de décision au cas des deux échantillons prélevés et répondre à la première question que le responsable de l'entreprise se pose.

B) Test unilatéral

Il s'agit d'apporter une réponse à la deuxième question que le responsable se pose.

(a) Énoncer l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 .

(b) a) Déterminer le nombre réel a tel que $P(D \leq a) = 0,95$. Arrondir à 10^{-3} .

b) En déduire la région critique du test unilatéral au seuil de 5%

(c) Énoncer la règle de décision du test.

(d) Appliquer la règle de décision au cas des deux échantillons prélevés et répondre à la deuxième question que le responsable de l'entreprise se pose.

7.2 Comparaison de deux moyennes

Exercice 27

Une entreprise fabrique des conserves alimentaires avec deux chaînes de production.

Un échantillon de taille $n_1 = 40$ conserves prélevé sur la chaîne 1 a pour masse moyenne $\bar{x}_1 = 248,51g$ et pour écart type $\sigma_1 = 4,85g$.

Un échantillon de taille $n_2 = 50$ conserves prélevé sur la chaîne 2 a pour masse moyenne $\bar{x}_2 = 253,17g$ et pour écart type $\sigma_2 = 6,13g$.

Le responsable qualité se pose deux questions sur la masse moyenne des conserves produites par chacune des chaînes. Ces deux moyennes peuvent-elles être considérées comme égales ?

La chaîne 1 produit-elle des conserves dont la masse moyenne est inférieure à celle des conserves de la chaîne 2 ?

Dans la suite, on note m_1 (respectivement m_2) la masse moyenne des conserves produites par la chaîne 1 (resp. la chaîne 2) et σ_1 (resp. σ_2) l'écart type correspondant. On suppose que tous les échantillons intervenant ici peuvent être considérés comme prélevés au hasard et avec remise.

On note \bar{X}_1 (resp. \bar{X}_2) la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille 40 (resp. 50) conserves de la chaîne 1 (resp. 2) associe la moyenne des masses des conserves de cet échantillon.

On suppose que \bar{X}_1 (resp. \bar{X}_2) suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ (resp. $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$) et que \bar{X}_1 et \bar{X}_2 sont indépendantes.

A) Test bilatéral de comparaison des moyennes m_1 et m_2 .

(a) Énoncer l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 ;

(b) On note D la variable aléatoire $D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

a) Sous H_0 , déterminer l'espérance $E(D)$.

b) On prend $\sqrt{\frac{n_1}{n_1 - 1}}\sigma'_1$ (resp. $\sqrt{\frac{n_2}{n_2 - 1}}\sigma'_2$) comme estimation ponctuelle de l'écart type σ_1 (resp. σ_2).

En déduire une estimation ponctuelle de l'écart type $\sigma(D) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$. Arrondir à 10^{-2} .

(c) On admet que la variable aléatoire D suit une loi normale.

Déterminer la région critique du test bilatéral au seuil de 5%.

(d) Énoncer la règle de décision du test.

(e) Appliquer la règle de décision au cas des deux échantillons prélevés et répondre à la première question que le responsable de l'entreprise se pose.

B) Test unilatéral

Il s'agit d'apporter une réponse à la deuxième question que le responsable se pose.

(a) Énoncer l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 .

(b) a) Déterminer le nombre réel a tel que $P(D \leq a) = 0,05$. Arrondir à 10^{-3} .

b) En déduire la région critique du test unilatéral au seuil de 5%

(c) Énoncer la règle de décision du test.

(d) Appliquer la règle de décision au cas des deux échantillons prélevés et répondre à la deuxième question que le responsable de l'entreprise se pose.