CHAPITRE

8

Variables aléatoires à densité

L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou dénombrable. De nombreuses questions ont cependant fait apparaître des lois dont le support est un intervalle tout entier.
Certains phénomènes amènent à une loi uniforme, d'autres à la loi exponentielle. Mais la loi la plus « présente » dans notre environnement est sans doute la loi normale : les prémices de la compréhension de cette loi de probabilité commencent avec Galilée lorsqu'il s'intéresse à un jeu de dé, notamment à la somme des points lors du lancer de trois dés. La question particulière sur laquelle Galilée se penche est :

Pourquoi la somme 10 semble se présenter plus fréquemment que 9 ?

Il publie une solution en 1618 en faisant un décompte des différents cas. Par la suite, Jacques Bernouilli, puis Abraham de Moivre fait apparaître la loi normale comme loi limite de la loi binomiale, au XVIII^e^ siècle. Pierre-Simon Laplace et Friedrich Gauss poursuivront leurs travaux dans ce sens.

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de variable aléatoire continue, les définitions de fonction de répartition, espérance, variance, écart type.
- Savoir utiliser la loi uniforme, le loi exponentielle, les lois normales.
- Connaître les principaux intervalles de fluctuation d'une loi normale centrée réduite.
- Aborder les différentes opérations usuelles sur les variables aléatoires suivant une loi normale.
- Aborder l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1 Intégrales impropres (ou intégrales généralisées)

Définition 1.

Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $[a; +\infty[$, $x \in]a; +\infty[$, et

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si $I(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $I(x)$ converge et **on pose**

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Remarque (Critère de Riemann)

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge-t-elle ?

2 Variable aléatoire continue

Les lois étudiées jusqu'à présent (bernouilli, binomiale) sont des lois « discrètes ». Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

2.1 Notion de variable aléatoire continue

Définition 2.

Une **variable aléatoire continue** est une variable qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Exemple de variables aléatoires qui ne sont pas discrètes :

- Variable T correspondant à la taille d'un élève,
- Variable L correspondant à longueur d'un train,
- Variable A correspondant au temps d'attente à une caisse ...

2.2 Densité et loi de probabilité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle I, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité de chacune de ses valeurs (comme dans le cas discret) mais à la probabilité de tout intervalle inclus dans I. On a ainsi recours à une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et appelée fonction de densité.

Définition 3.

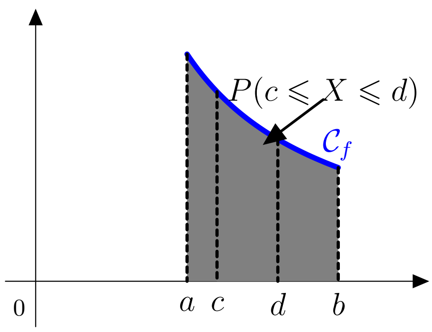
X est une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$ et f est une fonction continue, positive sur I telle que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

P est la **loi de probabilité de densité** f de X signifie que pour tout intervalle $J = [c; d]$ inclus dans I, $P(X \in J)$ est égale à l'aire du domaine $\{M(x; y)\,; x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$:

$$P(X \in [c; d]) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque



$P(a \leqslant X \leqslant b) = 1$

1. *Pour tout nombre réel $c \in I$,*

$$P(X = c) = 0$$

En effet, $P(X = c) = P(c \leqslant X \leqslant c) = \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

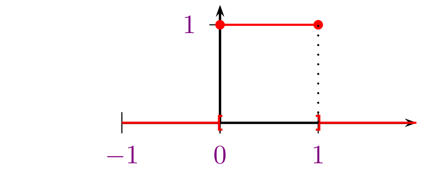
2. *On déduit immédiatement :*

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c < X \leqslant d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X < d)$$

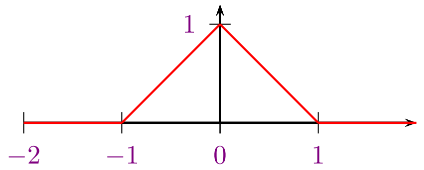
Exemple

Quelques exemples de densités de probabilités avec leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal :

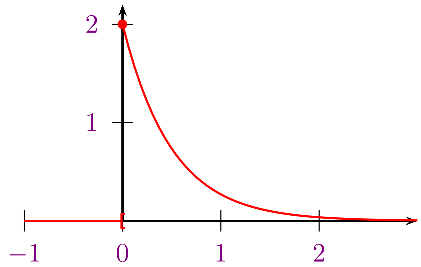
$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



2.3 Fonction de répartition

Définition 4.

Soit X une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition** de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 1.

La définition nous permet d'écrire :

- $F(x) = P\left(X \in \left]-\infty\ ;\ x\right]\right)$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$.
- $P(X > b) = P(\overline{X \leq b}) = 1 - F(b)$.

Remarque

On admet que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 0$. On a donc :

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$,
- $P(a < X) = P(a \leq X < b)$,
- $P(X > b) = P(X \geq b)$.

Propriété 2.

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

- F est une fonction croissante, définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Définition 5.

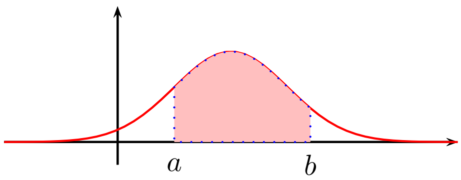
Dans le cas où F est dérivable, la fonction f dérivée de F est alors la **densité de probabilié de** X et pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

Conséquences :

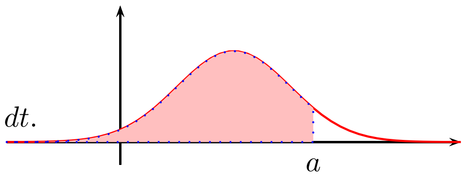
On retrouve les propriétés d'une fonction de densité

— F étant une fonction croissante, f est positive.

— $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx.$



— $$\begin{aligned} P(X \leq a) &= F(a) = \lim_{x\to-\infty}[\ F(a) - F(x)\ ] \\ &= \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt \underset{notation}{=} \int_{-\infty}^a f(t)\ dt. \end{aligned}$$



— $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1.$

Graphiquement, l'aire entre la courbe de f (fonction positive) et l'axe des abscisses vaut 1.

2.4 Espérance et variance

Définition 6.

Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité.

- On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par la relation

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx.$$

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, qui, s'il existe, est éfini par la relation

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\ x - E(X)\ ]^2 f(x)\ dx.$$

- On appelle **écart-type** de X le réel, noté σ_X, défini par la relation $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

On peut s'amuser à calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour la fonction f_2 précédente :

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_2(x)\ dx = \int_{-\infty}^{-1} x \times 0\ dx + \int_{-1}^{0} x(x+1)\ dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\ dx + \int_{1}^{+\infty} x \times 0\ dx$
$= \int_{-1}^{0} (x^2+x)\ dx + \int_{0}^{1} (-x^2+x)\ dx$
$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = 0.$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\ x - E(X)\ ]^2 f(x)\ dx = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\ dx + \int_{0}^{1} x^2(-x+1)\ dx$
$= \int_{-1}^{0} (x^3+x^2)dx + \int_{0}^{1} (-x^3+x^2)dx$
$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}.$
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

Propriété 3.

Soit X une variable aléatoire continue admettant une espérance et une variance, alors pour tout $a; b \in \mathbb{R}$:

- $E(aX+b) = aE(X)+b.$
- $V(aX+b) = a^2V(X).$
- $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$
- $E(X+Y) = E(X)+E(Y).$
- $E(X-Y) = E(X)-E(Y).$

Si de plus X et Y sont indépendantes,

- $V(X+Y) = V(X)+V(Y).$
- $V(X-Y) = V(X)+V(Y).$

3 Loi uniforme sur $[a, b]$

3.1 Définition

Définition 7.

Soit $[\,a\,,b\,]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $[\,a\,,b\,]$ si pour tout intervalle $I = [\,c\,,d\,]$ inclus dans $[\,a\,,b\,]$, la probabilité de l'événement « $X \in I$ » est l'aire du rectangle délimité par la droite d'équation $y = \frac{1}{b-a}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$. On peut donc écrire aussi :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad f(t) = \frac{1}{b-a}$$

f est appelée **densité de la loi uniforme sur** $[\,a\,,b\,]$.

Propriété 4.

Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\,a\,,b\,]$, alors

$$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration.

On a $\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \displaystyle\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$.

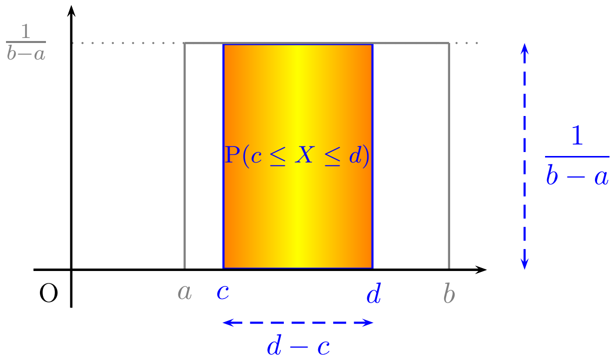
Remarque

Pour toute loi continue, pour tout réel c, $\mathrm{P}(X = c) = P(c \leq X \leq c) = 0$, donc :

$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \mathrm{P}(c < X \leq d) = \mathrm{P}(c \leq X < d) = \mathrm{P}(c < X < d)$.

Représentation graphique :

On a $P(a \leq X \leq b) = 1$



Cas d'utilisations de la loi uniforme :

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur.

On l'utilise lorsque la situation se ramène à choisir **au hasard** un réel dans un intervalle $[\,a\,,b\,]$.

Exemple

À l'arrêt de bus des papangues, un bus passe toutes les 10 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 3 minutes ? entre 2 et 4 minutes ? plus de 5 minutes ?

On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. T suit la loi uniforme $\mathcal{U}[\,0\,;10\,]$.

- $P(3 \leq T \leq 3) = \displaystyle\int_3^3 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_3^3 = \frac{3-3}{10} = \frac{0}{10} = 0$;
- $P(2 \leq T \leq 4) = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_2^4 = \frac{4-2}{10} = \frac{2}{10} = 0,2$;
- $P(T \geq 5) = 1 - \mathrm{P}(T < 5) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$. *$P(A) = 1 - P(\overline{A})$*

3.2 Espérance et variance

Définition 8.

Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[\,a\,,b\,]$, on appelle espérance de X le réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,dt$$

On appelle variance de X le réel, $V(X)$ défini par

$$V(X) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\,dt$$

Remarque

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X :

— $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

— $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

$E(X)$ correspond au centre de l'intervalle

L'espérance est une valeur numérique évaluant le résultat moyen d'une expérience aléatoire. La variance indique la dispersion, sans unité, des valeurs de la variable aléatoire autour de sa moyenne. L'écart-type σ correspond à la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et détermine, avec unité, la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de sa moyenne.

Propriété 5.

Si $X \sim \mathcal{U}[\,a\,,b\,]$, l'espérance $E(X)$ et la variance $\sigma(X)$ sont donnés par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \\
&= \frac{1}{3(b-a)} \times \left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{24(b-a)} \times \left((b-a)^3 - (a-b)^3\right) \\
&= \frac{2}{24(b-a)} \times (b-a)^3 \\
&= \frac{1}{12} \times (b-a)^2
\end{aligned}$$

Exemple

L'attente moyenne de notre voyageur à l'arrêt de bus des papangues, sera de :
$E(T) = \dfrac{0+10}{2} = 5$ minutes.
L'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1}{12}} \times (10-0) = 1,67$ nous informe sur la manière dont les temps d'attente se répartissent autour de la moyenne.

4 La loi exponentielle

4.1 Définition

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.
Elle permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments...

Définition 9.

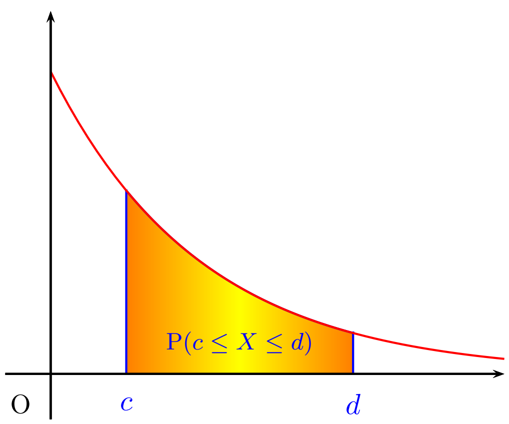
On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$ suit la **loi exponentielle de paramàtre** $\lambda > 0$, si pour tous réels c et d dans $[\,0\,;+\infty\,[$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

f est appelée **densité de la loi exponentielle de paramètre** λ.

Représentation graphique :



Propriété 6.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Démonstration.

On a $P(c \leq X \leq d) = \displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
Donc, en prenant $c = 0$ et $d = t$ on obtient : $\mathrm{P}(X \leq t) = \mathrm{P}(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Exemple

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

On détermine la probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 heures, qu'il fonctionne au moins 15 000 heures, et qu'il tombe en panne entre la 10 000e heure et la 15 000e heure :

- $P(T < 10000) = \mathrm{P}(T \leq 10000) = 1 - \mathrm{e}^{-0,00005 \times 10000} = 0,40$;
- $P(T \geq 15000) = 1 - \mathrm{P}(T < 15000) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0,00005 \times 15000}) = 0,47$;
- $P(10000 \leq T \leq 15000) = \mathrm{P}(T \leq 15000) - \mathrm{P}(T < 10000) = 0,53 - 0,40 = 0,13$.
  On utilise la formule $P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T < a)$

4.2 Espérance, variance, écart type

Définition 10.

L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 7.

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance $E(X)$ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exemple

On reprend l'exemple 10 précédent, on calcule :

$E(X) = \dfrac{1}{0,00005} = 20\,000.$

On peut donc en conclure que la durée de vie moyenne du composant électronique est de 20 000 heures.

Propriété 8.

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance $V(X)$ est : $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ Ainsi $\sigma_X = \dfrac{1}{\lambda}$

5 La loi normale

5.1 Définition

Cette loi est celle qui rend compte de diverses mesures d'une grandeur donnée, opérées à diverses reprises, chaque mesure étant sujette à des erreurs.

La loi normale (ou de Laplace-Gauss, appelée « normale » par Pearson en 1893) est la loi de certains phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne μ, de manière aléatoire, résultante d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'ajoutent sans que l'un d'eux soient dominant : par exemple la taille d'un individu en cm, influencée par le sexe, la nourriture, l'environnement, l'hérédité, le lieu géographique ...

Aussi appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss

Définition 11.

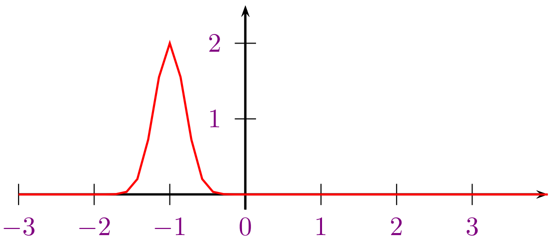
On appelle **loi Normale** de paramètres $m \in R$ et $\sigma > 0$ la loi d'une variable aléatoire continue X prenant toutes les valeurs réelles, de densité de probabilité la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

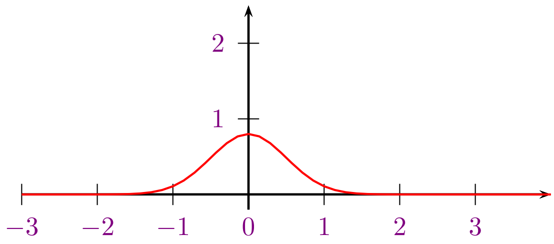
On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma)$.

Exemple

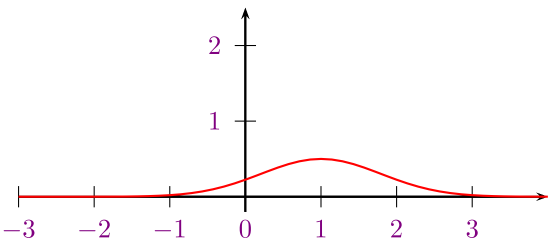
Voici des exemples de courbes pour quelques valeurs de m et σ :



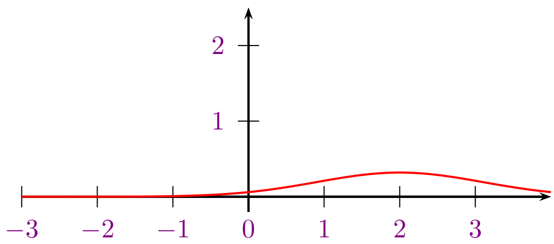
$m = -1$ et $\sigma = 0,2$



$m = 0$ et $\sigma = 0,5$



$m = 1$ et $\sigma = 0.8$



$m = 2$ et $\sigma = 1.1$

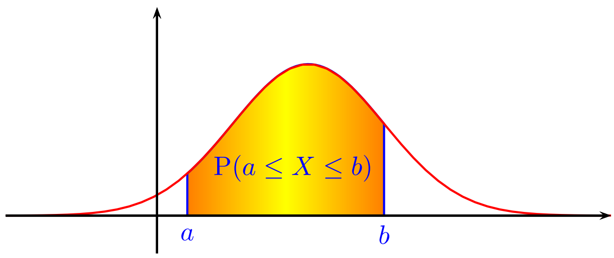
Propriété 9.

Pour tous a et b réels tels que $a \leq b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Représentation graphique :

Courbe « en cloche »



Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :

Casio 35 : $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \texttt{NormCD}(a, b, \sigma, \mu)$

TI 82 : $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \texttt{normalFrep}(a, b, \mu, \sigma)$

Exemple

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.

Une pièce est conforme lorsque sa longueur (en millimètres) appartient à l'intervalle $[74,4 ; 75,6]$. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type $0,25$. Quelle est la probabilité qu'une piéce soit conforme ?

On calcule $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6)$, la calculatrice donne $0,98$. La pièce est donc conforme dans 98% des cas.

Propriété 10.

On admet que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors

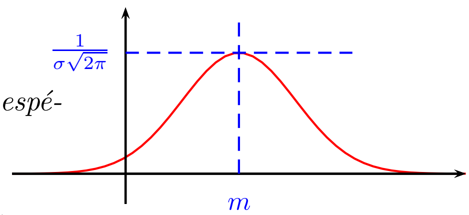
- $E(X) = m$
- $\sigma(X) = \sigma$.

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance et son écart-type.

Remarque

Grâce à l'allure des courbes de densité, on peut observer :

- *Que la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = m$. On a ainsi $P(X \leq m) = 0,5$.*
- *Que le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X (de valeur $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),*
- *Que plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.*



? **Exercice**

Prouvez ces propriétés en étudiant la fonction de densité (dérivée, tableau de variation, extremum,...)

5.2 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

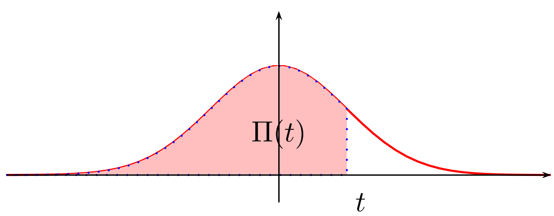
Définition 12.

La variable aléatoire T qui suit la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$ est dite **variable aléatoire centrée réduite**.

Sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Notation : On note Π la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On a donc

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ \Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$



Propriété 11.

Soit T la variable aléatoire centrée et réduite.

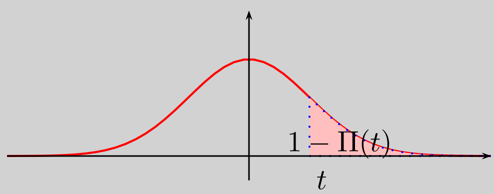
- $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - \Pi(t)$.
- Si t est positif : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.
- Pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$: $P(a \leq T \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$.
- Pour tout $t \geq 0$, $P(-t \leq T \leq t) = 2\Pi(t) - 1$.

Exemple

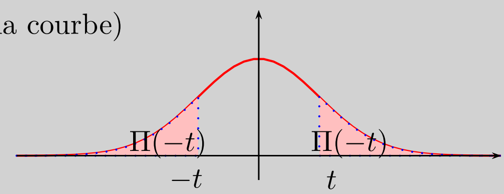
- $P(T \geq \frac{1}{2}) = 1 - \Pi(\frac{1}{2}) \approx 1 - 0.6914 = 0,3086$
- $P(T \leq -\frac{1}{2}) = \Pi(-\frac{1}{2}) = 1 - \Pi(\frac{1}{2}) \approx 1 - 0.6914 = 0,3086$
- $P(-1 \leq T \leq 2) = P(T \leq 2) - P(T \leq -1) = \Pi(2) - \Pi(-1) \approx 0.9772 - 0.1586 = 0,8186$
- $P(-1 \leq T \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0,6826$

Démonstration.

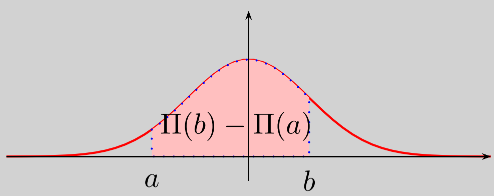
$$\begin{aligned} P(T \geq t) &= 1 - P(T < t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - \Pi(t). \end{aligned}$$



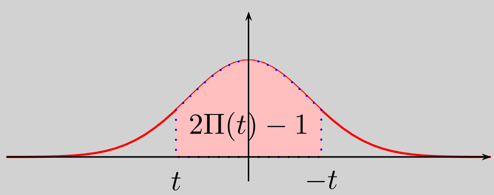
$$\begin{aligned} \Pi(-t) &= P(T \leq -t) \\ &= P(T \geq t) \quad \text{(par symétrie de la courbe)} \\ &= 1 - P(T < t) \\ &= 1 - \Pi(t). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(a \leq T \leq b) &= P(T \leq b) - P(T < a) \\ &= P(T \leq b) - P(T \leq a) \\ &= \Pi(b) - \Pi(a). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(-t \leq T \leq t) &= \Pi(t) - \Pi(-t) \\ &= \Pi(t) - [1 - \Pi(t)] \\ &= 2\Pi(t) - 1. \end{aligned}$$



5.3 Utilisation de la table de la loi normale

Un formulaire ne donne que les valeurs de la loi normale centrée réduite et pour des valeurs positives. En voici un extrait pour comprendre la méthode de lecture :

t	$0,05$	$0,06$	$0,07$
$1,1$	$0,8749$	$0,8770$	$0,8790$
$1,2$	$0,8944$	$0,8962$	$0,8980$
$1,3$	$0,9115$	$0,9131$	$0,9147$

— **Calcul de $P(T \leq 1,36)$:**

Le nombre situé à l'intersection de la colonne $0,06$ et de la ligne $1,3$ est la valeur de la fonction de répartition de T pour $t = 1,3 + 0,06 = 1,36$.

Ainsi, $\Pi(1,36) = P(T \leq 1,36) = 0,9131$.

— **Calcul de $P(T \geq 1,25)$:**

$P(T \geq 1,25) = 1 - \Pi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$.

— **Calcul de $P(T \geq -1,17)$:**

$P(T \leq -1,17) = P(T \geq 1,17) = 1 - \Pi(1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$.

— **Calcul de $P(1,15 \leq T \leq 1,37)$:**

$P(1,15 \leq T \leq 1,37) = \Pi(1,37) - \Pi(1,15) = 0,9147 - 0,8749 = 0,0398$.

5.4 Lien avec la loi normale

Propriété 12.

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. En particulier, on a $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$.

Ce résultat est très important, puisqu'alors il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale !

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
On pose $T = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-12}{3}$.
Calcul de $P(X < 16)$:

- $X < 16 \iff T < \dfrac{16-12}{3} \iff T < \dfrac{4}{3}$.
- Donc, $P(X < 16) = P(T < 1,33) = \Pi(1,33)$.
- On lit sur la table $\Pi(1,33) = 0,9082$ donc : $P(X < 16) = 0,9082$.

Calcul de $P(9 < X < 15)$:

- $P(9 < X < 15) = P(-1 < T < 1)$
  $= 2\Pi(1) - 1.$
- Or, $\Pi(1) = 0,8413$ donc : $P(9 < X < 15) = 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6828$

5.5 Intervalles de fluctuation en fonction de σ

Propriété 13.

Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$;
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$;
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Démonstration.

$T = \dfrac{X - m}{\sigma} \iff X = m + \sigma T.$

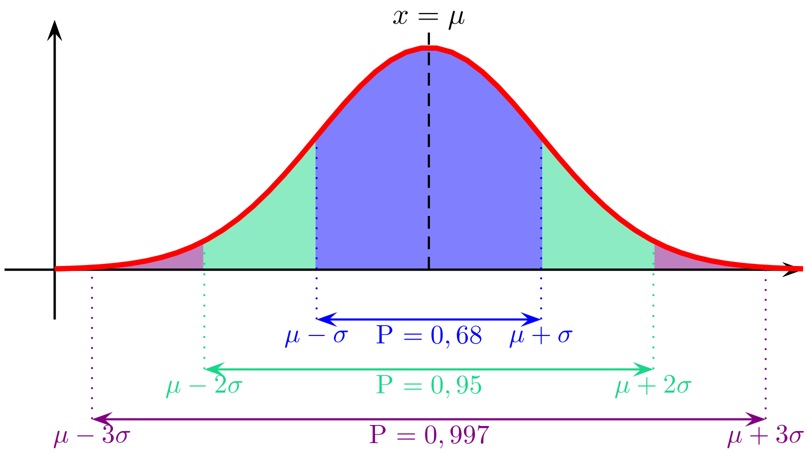
Donc, pour $t > 0$, $P(-t \leq T \leq t) = P(-\sigma t \leq \sigma T \leq \sigma t)$
$= P(m - \sigma t \leq m + \sigma T \leq m + \sigma t)$
$= P(m - \sigma t \leq X \leq m + \sigma t).$

Ainsi, en particulier :

$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = P(-1 \leq T \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 \approx 0,68.$

$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq T \leq 2) = 2\Pi(2) - 1 = 2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,95.$

Interprétation graphique :



Exemple

Pour l'entreprise qui produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir l'égalité : $P(75 - h \leq L \leq 75 + h) = 0,997$? Interpréter ce résultat.

On utilise la formule : $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq L \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ et on a :
$\mathrm{P}(75 - 3 \times 0,25 \leq L \leq 75 + 3 \times 0,25) \approx 0,997$ donc, $h = 3 \times 0,25 = 0,75$.

De plus, $\mathrm{P}(74,25 \leq L \leq 75,75) \approx 0,997$, ce qui signifie que quasiment toutes les pièces (99,7 %) ont théoriquement une largeur comprise entre 74,25 mm et 75,75 mm.

5.6 Opérations de variables suivant une loi normale

Propriété 14.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$. Alors, pour tous $a;b \in \mathbb{R}$:

- La variable aléatoire $aX + b$ suit la loi normale $\mathcal{N}(am + b\,;|a|\,\sigma)$,

Si de plus Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m';\sigma')$ et est indépendante de X, alors

- La variable aléatoire $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m + m';\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$,
- La variable aléatoire $X - Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m - m';\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$,

Exemple

Si X suit la loi $\mathcal{N}(1;\sqrt{3})$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(-1;1)$, alors :

- La variable aléatoire $-2X + 5$ suit la loi normale $\mathcal{N}(3;2\sqrt{3})$,
- La variable aléatoire $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;2)$,
- La variable aléatoire $X - Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(2;2)$.

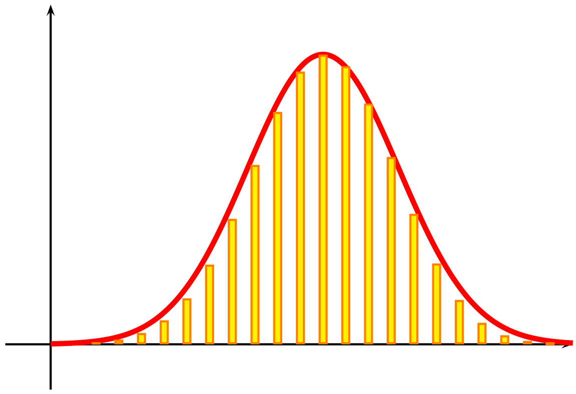
5.7 Approximation

On répète n fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire suivant une loi de **Bernoulli** donnant lieu à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$).
La variable aléatoire X qui, à cette série de n expériences, associe le nombre de succés suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p.
Son espérance est $E(x) = np$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Propriété 15.

La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1 - p)}\right)$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

On a représenté ci-contre le diagramme en bâtons de la loi de probabilité d'un loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ ainsi que la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.
On remarque une certaine similitude !



Exemple

Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande.

Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photo par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6 % du marché.

On note X la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

- on peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où le succès est l'événement « l'appareil de marque A est vendu ». Alors, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 40$ et $p = 0,386$;
- la probabilité que, sur 40 appareils vendus ce jour, 10 soient de la marque A vaut
  $P(X = 10) = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} \times 0,386^{10} \times 0,614^{30} \approx 0,03$;
  On utilise la formule $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$
- l'espérance de X vaut $E(X) = np = 40 \times 0,386 = 15,44$ et son écart type vaut
  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0,386 \times 0,614} \approx 3,08$;
- on peut approcher cette loi par loi normale de paramètres $\mu = 15,44$ et $\sigma = 3,08$;
- la probabilité de l'événement : « un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25 » vaut P$(15 \leq Y \leq 25) = 0,56$.