CHAPITRE

7

Variables Aléatoires Discrètes

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de variable aléatoire discrète et certaines transformations avec leurs effets.
- Aborder la notion de couple de variables aléatoires discrètes
- Savoir utiliser la loi binomiale, la loi de Poisson
- Aborder l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

1 Variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire discrète

Définition 1.

Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

Exemple

Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :

  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 2.

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction f qui a chaque valeur associe sa probabilité.

Remarque

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées.

Dans tout le reste du chapitre, on considèrera la variable aléatoire discrète de loi :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple

On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de X est donnée par :

x_i	-10	-6	-2	4	8	12
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi, X vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

La loi de X est donnée par :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Remarque

On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1 !

Propriété 1.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

- $P(X \leq k+1) = P(X \leq k) + P(X = k+1)$
- $P(X \leq k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} P(X = i)$

Remarque

Ici X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ mais la propriété se généralise à des ensembles discrets quelconques.

1.3 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle **espérance** de la variable aléatoire X le réel noté $E(X)$ qui vaut :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Remarque

Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Exemple

On reprend le jeu de cartes étudié précédemment.

On rappelle que la loi de X est donnée par :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

D'où le calcul de l'espérance :

- $E(X) = 0 \times \dfrac{5}{8} + 1 \times \dfrac{1}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} + 4 \times \dfrac{1}{8}$
- $E(X) = \dfrac{8}{8} = 1.$
- Concrètement, cela signifie « qu'en moyenne », le joueur gagne 1 point.

1.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 4.

Soit X une variable aléatoire aléatoire discrète d'espérance $E(X)$.

- On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + ... + p_n[x_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2.$$

- On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_X défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple

Calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \dfrac{5}{8}[0-1]^2 + \dfrac{1}{8}[1-1]^2 + \dfrac{1}{8}[3-1]^2 + \dfrac{1}{8}[4-1]^2$
- $V(X) = \dfrac{5}{8} + 0 + \dfrac{4}{8} + \dfrac{9}{8} = \dfrac{9}{4} = 2,25.$

D'où l'écart-type :

- $\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \sigma_x = \dfrac{3}{2} = 1,5.$

Le théorème suivant permet un calcul plus facile de la variance :

Théorème 1 (De Kœnig).

Soit X une variable aléatoire discrète, alors :

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

Exemple

Autre méthode de calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - 1^2$
- $V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} - 1 = V(X) = \frac{9}{4} = 2,25.$

Propriété 2.

- La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- Si X est exprimé dans un certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

1.5 Transformation affine d'une variable aléatoire

Propriété 3.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et une variance, alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une espérance, une variance et un écart-type définis par :

- $E(aX + b) = aE(X) + b.$
- $V(aX + b) = a^2V(X).$
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$

Exemple

On considère la variable aléatoire X de loi

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- La loi de $Y = 2X - 1$ est donnée par

y_i	-1	1	3
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- $E(X) = \dfrac{5}{4}$ donc : $E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2 \times \dfrac{5}{4} - 1 = \dfrac{3}{2}$.
- $V(X) = \dfrac{11}{16}$ donc : $V(Y) = V(2X-1) = 2^2 V(X) = 4 \times \dfrac{11}{16} = \dfrac{11}{4}$.
- $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$ donc : $\sigma(Y) = \sigma(2X-1) = |2| \times \dfrac{\sqrt{11}}{4} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

2 Couples de variables aléatoires

2.1 Définition

Certaines situations sont naturellement décrites par la donnée d'un couple de variables aléatoires. Par exemple, en météorologie, on peut s'intéresser au couple formé par la donnée de la température (T) et de la pression (P) atmosphériques. On est ainsi amené à étudié les deux paramètres simultanément, donc à regarder le couple $(T; P)$, qui est un **couple de variables aléatoires**.

Exemple

On considère dans le plan les points de coordonnées entières situés dans la zone B, définie par

$$B = \{(x; y) \text{ tel que } x; y \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 2 \ , \ 1 \leq y \leq 3\}.$$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir l'un de ces points au hasard (tous les choix de points dans B étant équiprobables). On définit la variable aléatoire discrète Z qui est formée du couple de coordonnées du point choisi.

- Détermination de la loi de Z :

Valeurs de Z	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- La variable aléatoire Z est appelée couple des variables aléatoires X et Y.
  On peut présenter sa loi de manière à faire apparaître les rôles joués par X et Y plus clairement :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- on peut aussi déterminer les lois de X et de Y à partir de celle de Z :

  Par exemple, $P(Y=1) = P((X=1) \text{ et } (Y=1)) + P((X=2) \text{ et } (Y=1))$

  $$= P(Z=(1;1)) + P(Z=(2;1)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

De manière plus rapide, en faisant les additions en colonne, on obtient la loi de Y :

y_i	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- en faisant les additions en ligne, on obtient la loi de X :

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- ces deux lois sont appelées lois marginales du couple $(X;Y)$.

  De façon synthétique, on peut représenter toutes ces données dans un même tableau :

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X=x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

2.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de valeurs respectives $(x_1; x_2; ...; x_n)$, et $(y_1; y_2; ...; y_p)$.
Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Exemple

On lance deux dés équilibrés à six faces (un rouge, et un bleu). On appelle X le numéro de la face du dé bleu, et Y le numéro de la face du dé rouge. On appelle S la somme des faces obtenues.

- Les variables X et Y sont indépendantes.
- Les variables X et S ne sont pas indépendantes.
- Les variables Y et S ne sont pas indépendantes.

Exemple

Soit deux variables aléatoires discrètes X vérifiant $P(X = -1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $Y = X^2$.

- Loi de Y :

y_i	0	1
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

- Loi du couple $(X; Y)$: on calcule la probabilité obtenue pour chaque couple

$Y \backslash X$	-1	0	1	$P(Y = y_i)$
0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	

- On a par exemple $P(-1, 0) = P((X = -1) \cap (Y = 0)) = 0$.
  Or, $P(X = -1) \times P(Y = 0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18} \neq 0$.
  X et Y ne sont donc pas indépendantes.
  (ce résultat était prévisible puisque, par construction, la variable Y est dépendante de la variable X).

Propriété 4.

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

2.3 Somme de variables aléatoires

Propriété 5.

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant une espérance, alors

- $X + Y$ admet l'espérance $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- $X - Y$ admet l'espérance $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

Et dans le cas où X et Y sont indépendantes :

- $X+Y$ admet la variance $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ et l'écart type $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$
- $X-Y$ admet la variance $V(X-Y) = V(X)+V(Y)$ et l'écart type $\sigma_{X-Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

Exemple

Dans une fête foraine, on considère deux roues A et B définies ainsi :

— pour la roue A : on a 20% de chance de tomber sur le nombre 10, 50% de chance de tomber sur le nombre 20 et 30% de chance de tomber sur le nombre 30.

— pour la roue B : on a 40% de chance de tomber sur le nombre 10 et 60% de chance de tomber sur le nombre 20.

On lance successivement les deux roues, on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour la roue A et Y la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour la roue B.

- Les deux variables X et Y sont indépendantes l'une de l'autre.
- La loi de X est donnée par :

x_i	10	20	30
$P(X = x_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

on obtient $E(X) = 21$ et $V(X) = 49$.

- La loi de Y est donnée par :

y_i	10	20
$P(Y = y_i)$	$0,4$	$0,6$

on obtient $E(Y) = 16$ et $V(Y) = 24$.

- La loi de $S = X + Y$ est donnée par :

d_i	20	30	40	50
$P(S = s_i)$	$0,08$	$0,32$	$0,42$	$0,18$

on obtient $E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 21 + 16 = 70$,
et $V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 49 + 24 = 73$.

- La loi de $D = X - Y$ est donnée par :

d_i	-10	0	10	20
$P(D = d_i)$	$0,12$	$0,38$	$0,38$	$0,12$

on obtient $E(D) = E(X + Y) = E(X) - E(Y) = 21 - 16 = 5$,
et $V(D) = V(X - Y) = V(X) - V(Y) = 49 - 24 = 25$.

3 Les lois fondamentales

3.1 La loi de Bernoulli

Définition 6.

Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès » qui a pour probabilité p, l'autre appelée « échec » qui a pour probabilité $q = 1 - p$.

Définir une **loi de Bernoulli de paramètre** p, c'est associer une loi de probabilité discréte à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple

Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété 6.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, alors :

- L'espérance de X vaut $E(X) = p$.
- La variance de X vaut $V(X) = pq$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = \dfrac{1}{6}$ et $V(X) = \dfrac{5}{36}$.

3.2 La loi binomiale

Définition 7.

La **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernouilli de paramètre p indépendantes.

Elle est définie par :

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times p^k \times q^{n-k} \quad , \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n.$$

Exemple

On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'intéresse à l'apparition de la face 6. Chaque lancer est une expérience de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{6}$. On obtient donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2; \dfrac{1}{6}\right)$.

nombre de succés	0	1	2
probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 7.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors :

- L'espérance de X vaut $E(X) = np$.
- La variance de X vaut $V(X) = npq$.

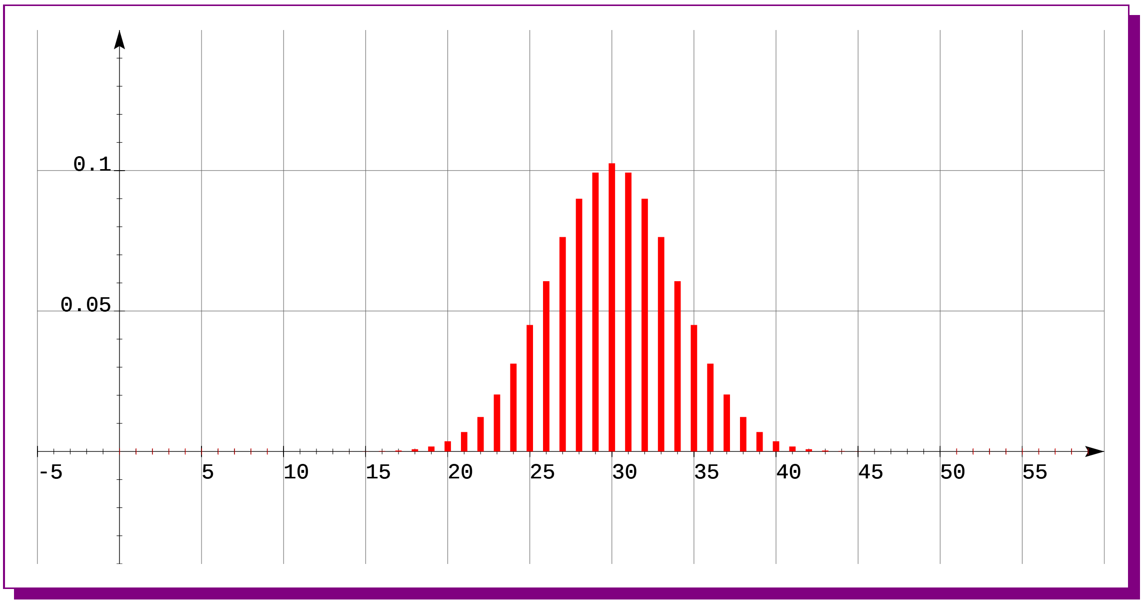
Exemple

Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = \dfrac{1}{3}$ et $V(X) = \dfrac{5}{18}$.

Exemple (Jeu de Pile ou Face)

On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite, et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque série de 60 lancers, associe nombre de fois où est sorti le *Pile*.

Chaque lancer est indépendant des précédents, et il n'y a que 2 issues possibles (*Pile* ou non) ; la variable aléatoire X suit donc une loi binômiale. Comme la probabilité d'obtenir *Pile* est $1/2$, et qu'il y a 60 expériences, cette loi est la loi $\mathcal{B}(60; 1/2)$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60 ; 1/2)

La probabilité d'obtenir 25 *Pile* sur les 60 lancers est

$$P(X = 25) = C_{60}^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{35} \approx 0,045.$$

Exemple (Jeu de dé)

On jette un dé bien équilibré à 6 faces. La probabilité d'obtenir le numéro 6 sur un lancer est de $1/6$. On considère l'épreuve qui consiste à lancer 60 fois de suite le dé, en notant à chaque fois le numéro obtenu.

On considère maintenant 2 variables aléatoires distinctes :

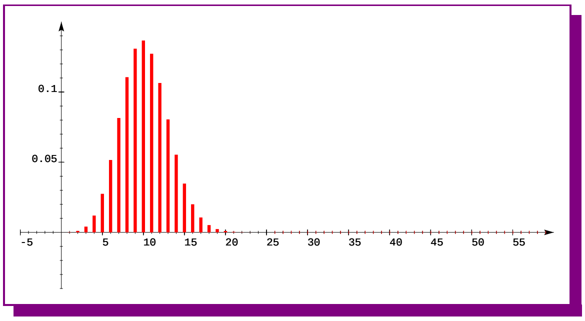
On note X la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a obtenu le numéro 6, et on note Y la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a **pas** obtenu le numéro 6.

Ces 2 variables sont évidemment liées : quel que soit la série de 60 lancers, on aura $X + Y = 60$.

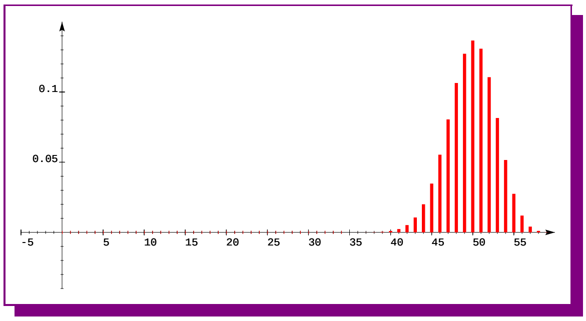
Que ce soit du point de vue de la variable X ou de celui de la variable Y, l'expérience consistant à lancer une fois le dé est indépendante des autres expériences, et ne comporte que 2 issues possibles (on obtient le 6 ou pas, le succès du point de vue de X étant l'échec du point de vue de Y et réciproquement).

On en déduit que la variable X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 1/6)$ et que la variable Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 5/6)$.

Les représentations graphiques de ces lois sont données ci-dessous :



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60 ; 1/6)



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60 ; 5/6)

La probabilité d'obtenir 10 fois le numéro 6 sur 60 lancers est :

$$P(X = 10) = C_{60}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50} = \frac{60!}{10!50!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} = \frac{60 \times 59 \times \ldots \times 51}{10 \times 9 \times \ldots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137$$

La probabilité d'obtenir 50 fois un autre numéro que le numéro 6 sur les 60 lancers est :

$$P(Y = 50) = C_{60}^{50} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{60!}{50!10!} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{60 \times 59 \times \ldots \times 51}{10 \times 9 \times \ldots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137$$

Ces deux probabilités sont bien sûr égales puisque, comme $X + Y = 60$, on a $Y = 60 - X$ et donc

$$p(X = 10) = p(-X = -10) = p(60 - X = 60 - 10) = p(Y = 50).$$

Ici, les espérances des variables X et Y sont respectivement

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{6} = 10 \qquad \text{et} \qquad E(Y) = 60 \times \frac{5}{6} = 50.$$

3.3 La loi de Poisson

Les lois de Poisson interviennent dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé (pannes de machines, sinistres, mortalité, temps de guérison de petites blessures, stocks, ...)

Elles modélisent des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

— Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,

— Nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,

— Nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule …

Définition 8.

La variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exemple

On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30.

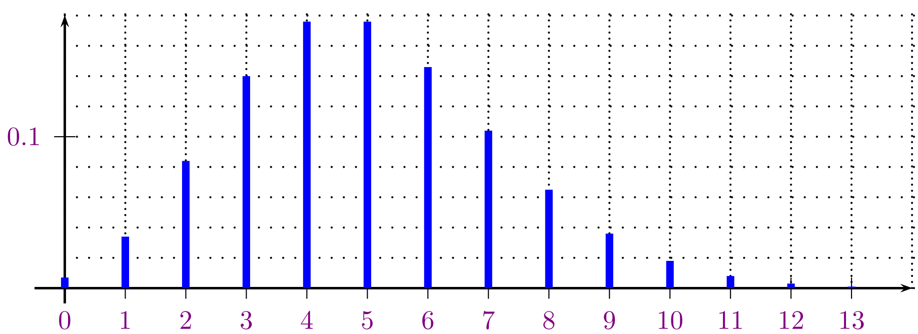
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de poisson nous donne :

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	$0,034$	$0,084$	$0,140$	$0,176$	$0,176$	$0,146$	$0,104$

k	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(X = k)$	$0,007$	$0,065$	$0,036$	$0,018$	$0,008$	$0,003$	$0,001$	0

- On peut aussi représenter graphiquement la loi $\mathcal{P}(5)$:



- La probabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut : $P(X = 10) = 0,018$.

- La probabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut : $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265$.

➔ La probabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :
$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=8)] = 1 - 0,867 = 0,133.$

Propriété 8.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $E(X) = V(X) = \lambda$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = V(X) = 5$.

3.3.1 Approximation d'une loi loi binomiale par la loi de poisson

Exemple

Dans une entreprise, on estime que la probabilité pour un article fabriqué d'être défectueux est de $p = 0,05$ (valeur obtenue en accumulant une grande série de tests). On prélève dans un stock de 80000 pièces 120 articles.
On s'intéresse au nombre d'articles défectueux dans l'échantillon prélevé.
Bien que les choix des articles prélevés se fasse sans remise, on considère que le stock contient suffisament d'articles pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
Sous les hypothèses précédentes, tout se passe comme si l'on procédait à l'expérience suivante : On retire du stock un article, on le teste, on relève s'il est conforme ou non, et on le remet dans le stock. On prélève alors une autre pièce et on continue ainsi de suite. L'expérience est donc une série d'épreuves de Bernouilli indépendantes, et on s'intéresse au nombre d'échecs relevés dans la série.
Considérons deux lois $X \sim \mathcal{B}(120; 0,05)$ dont l'espérance vaut $120 \times 0,05 = 6$ et $Y \sim \mathcal{P}(6)$ et comparons-les.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	0,002	0,013	0,041	0,087	0,134	0,163	0,165	0,141	0,105	0,069	0,04	0,021	0,01
$P(Y=k)$	0,002	0,015	0,045	0,089	0,134	0,161	0,161	0,138	0,103	0,069	0,041	0,023	0,011

On constate que les lois X et Y de l'exemple précédent sont très proches. On peut considérer que X et Y suivent pratiquement la même loi, et donc on peut estimer que X suit pratiquement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = E(X) = np$.

On admet le résultat suivant :

Propriété 9.

Pour n « assez grand » et p « proche » de 0 tels que $np(1-p)$ ne soit « pas trop grand », on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$.

On convient de faire cette approximation pour $n > 30$, $p \leq 0,1$ et $np(1-p) \leq 10$.

Dans la pratique on utilise une approximation de loi binomiale par une loi de Poisson lorsque le nombre d'expériences est grand. En effet, calculer des probabilités faisant intervenir une loi binomiale avec des grands nombres nécessite beaucoup d'opérations, ce nombre est moins important avec une loi de Poisson.

Exemple

Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses ; on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 120 pièces associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, en préciser les paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$.
3. Montrer qu'une approximation de la loi binomiale par une loi de poisson convient.
4. Calculer $P(X = 5)$ à l'aide de cette approximation.
5. Comparer pour apprécier la qualité de l'approximation.

Solution

1. Pour chaque tirage, on a **deux résultats possibles** : ou bien la pièce est défectueuse avec une probabilité de $p = 0,05$; ou bien elle ne l'est pas avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,95$.
   On effectue 120 tirages de manière **indépendante**.
   On peut donc conclure que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(120; 0,05)$.
2. $P(X = 5) = C_{120}^{5} \times 0,05^5 \times 0,95^{115} = 0,1634$.
3. On a $n > 30$; $p < 0,1$ et $np(1-p) = 5,7 < 10$.
   On peut donc faire une approximation grâce à la loi de poisson $\mathcal{P}(120 \times 0,05) = \mathcal{P}(6)$.
4. On obtient : $P(X = 5) = e^{-6}\dfrac{6^5}{5!} = 0,1606$.
5. La loi de poisson donne la même valeur à 10^{-2} près, ce qui est une bonne approximation.