CHAPITRE

1 LES MATRICES

Sommaire

Objectifs du chapitre :

- Se familiariser avec la notion de matrice
- Savoir calculer (addition, soustraction, produit) avec les matrices
- Savoir inverser une matrice
- Savoir résoudre un système linéaire
- Modéliser et résoudre un problème avec les matrices
- Traduire et résoudre un problème matriciel avec une calculatrice, un logiciel.

1 Généralités

1.1 Définition

Exemple

Voici une liste de tarifs postaux, en euros :

Poids/Recommandé	Sans	R1	R2	R3
Jusqu'à 20g	0,56 €	3,36 €	3,96 €	4,86 €
Jusqu'à 50g	0,90 €	3,70 €	4,30 €	5,20 €
Jusqu'à 100g	1,35 €	4,15 €	4,75 €	5,65 €
Jusqu'à 250g	2,22 €	5,02 €	5,62 €	6,52 €
Jusqu'à 500g	3,02 €	5,82 €	6,42 €	7,52 €
Jusqu'à 1kg	3,92 €	6,72 €	7,32 €	8,22 €
Jusqu'à 2kg	5,16 €	7,96 €	8,56 €	9,46 €
Jusqu'à 3kg	6,04 €	8,84 €	9,33 €	10,23 €

Les informations peuvent étre présentées de façon plus synthétique à l'aide du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 0,56 & 3,36 & 3,96 & 4,86 \\ 0,90 & 3,70 & 4,30 & 5,20 \\ 1,35 & 4,15 & 4,75 & 5,65 \\ 2,22 & 5,02 & 5,62 & 6,52 \\ 3,02 & 5,82 & 6,42 & 7,52 \\ 3,92 & 6,72 & 7,32 & 8,22 \\ 5,16 & 7,96 & 8,56 & 9,46 \\ 6,04 & 8,84 & 9,33 & 10,23 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice à 8 lignes et 4 colonnes.

Le terme $a_{i,j}$ est situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne.

Définition 1 (Matrice)**.**

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes, que l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.

Les nombres a_{ij} sont appelés les **coefficients**, les **termes** ou les **éléments** de la matrice.

Exemple

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ est de dimension 4×3.

  Le terme a_{11} est 1, le terme a_{23} est 6, le terme a_{42} est 11.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.

  a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la $2^{ième}$ ligne et de la $3^{ième}$ colonne, il vaut 5.

Définition 2.

Soit A une matrice $n \times p$.

- Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$
- Si $n = p$, A est une **matrice carrée de taille** n. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.

Exemple

- La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 2×1..
- La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 1×4.
- La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.
- La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.

Matrices carrées particulières :

Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ une matrice carrée de taille n.

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, A est appelée matrice **triangulaire supérieure** : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, A est appelée matrice **triangulaire inférieure** : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

— Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice unité** ou **matrice identité**.

On note I_n pour la matrice identité de taille n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

- Matrice triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice triangulaire inférieure : $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

1.2 Égalité de deux matrices

Théorème 1 (Égalité de deux matrices)**.**

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si :

- Elles sont de même dimension
- $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous couple (i, j).

Exemple

On considère les trois matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & y & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

Les matrices A et B ne peuvent pas être égales puisqu'elles n'ont pas la même dimension. Les matrices A et C seront égales si et seulement si $x = 1$ et $y = 8$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

Exemple

Soit A la matrice donnant les tarifs postaux. Supposons que ces tarifs subissent une augmentation.

Soit B la matrice donnant les augmentations envisagés pour chacun des tarifs :

$$B = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,04 & 0,09 & 0,18 \\ 0,03 & 0,05 & 0,10 & 0,20 \\ 0,05 & 0,15 & 0,75 & 0,65 \\ 0,22 & 0,02 & 0,62 & 0,52 \\ 0,32 & 0,82 & 0,42 & 0,52 \\ 0,42 & 0,72 & 0,32 & 0,22 \\ 0,50 & 0,96 & 0,56 & 0,46 \\ 0,50 & 0,84 & 0,33 & 0,23 \end{pmatrix}$$

Soit C la matrice donnant les nouveaux tarifs. Comme le nouveau tarif est obtenu en faisant l'addition de l'ancien tarif et de son augmentation, chaque coefficient de la matrice C est la somme du coefficient de la matrice A et du coefficient de la matrice B correspondant. On note $C = A + B$.

Définition 3 (Addition de matrices)**.**

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de taille $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne peut pas additionner des matrices qui n'ont pas les mêmes dimensions (c'est à dire des matrices telles que le nombre de ligne ou le nombre de colonne ne soit pas le même).

Propriété 1.

Soit A, B et C des matrices de mêmes dimensions alors :

- commutativité : $A + B = B + A$;
- associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + 0 = A$ (où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

Démonstration.

Application directe de la définition et des propriétés d'addition des nombres réels.

2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Exemple

Supposons, toujours dans le cas des tarifs postaux, que les tarifs soient augmentés uniformément de 10%. Chaque coefficient de la matrice A est donc multiplié par 1,1. La matrice D des nouveaux tarifs est notée $D = 1,1A$.

Définition 4 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)**.**

Si $A = \left(a_{ij}\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA comme étant la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Exemple

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.

Soit A une matrice, k et k' des nombres, on a :

- $1\mathrm{A} = \mathrm{A}$;
- $-\mathrm{A} = (-1)\mathrm{A}$;
- associativité $k(k'\mathrm{A}) = (kk')\mathrm{A}$;
- distributivité pour les matrices : $k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}$;
- distributivité pour les réels : $(k+k')\mathrm{A} = k\mathrm{A} + k'\mathrm{A}$.

Démonstration.

Application des définitions et des propriétés d'addition et multiplication de nombres réels.

Définition 5 (Soustraction de matrices)**.**

Si A et B sont deux matrices de même taille, on définit la soustraction $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ par : $\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{A} + (-\mathrm{B})$

2.3 Produit de deux matrices

Exemple

Dans une entreprise de vente de pièces détachées, deux services parallèles s'occupent du courrier. Notons S_1 le service "traitement des commandes" et S_2 le service "échange-réclamation".

Pour une semaine donnée, le volume du courrier traité est donné par le tableau suivant :

Service/jusqu'à	20g	50g	100g	250g	500g	1kg	2kg	3 kg
S_1	50	35	15	10	0	0	0	0
S_2	7	3	4	10	0	0	0	1

On souhaite calculer le coût d'envoi par service et suivant le type d'affranchissement du courrier. On dispose les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} \text{sans} & R1 & R2 & R3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0,56 & 3,36 & 3,96 & 4,86 \\ 0,90 & 3,70 & 4,30 & 5,20 \\ 1,35 & 4,15 & 4,75 & 5,65 \\ 2,22 & 5,02 & 5,62 & 6,52 \\ 3,02 & 5,82 & 6,42 & 7,52 \\ 3,92 & 6,72 & 7,32 & 8,22 \\ 5,16 & 7,96 & 8,56 & 9,46 \\ 6,04 & 8,84 & 9,33 & 10,23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} S1 \\ S2 \end{array}\begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & a_{13} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{13} représente l'ensemble des colis affranchis au type R2 pour le service S1.

On obtient :

Services	sans	R1	R2	R3
S_1	101.95	.	.	.
S_2	.	.	.	.

On ne peut multiplier deux matrices que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.

Définition 6 (Multiplication de matrices)**.**

Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.

Exemple

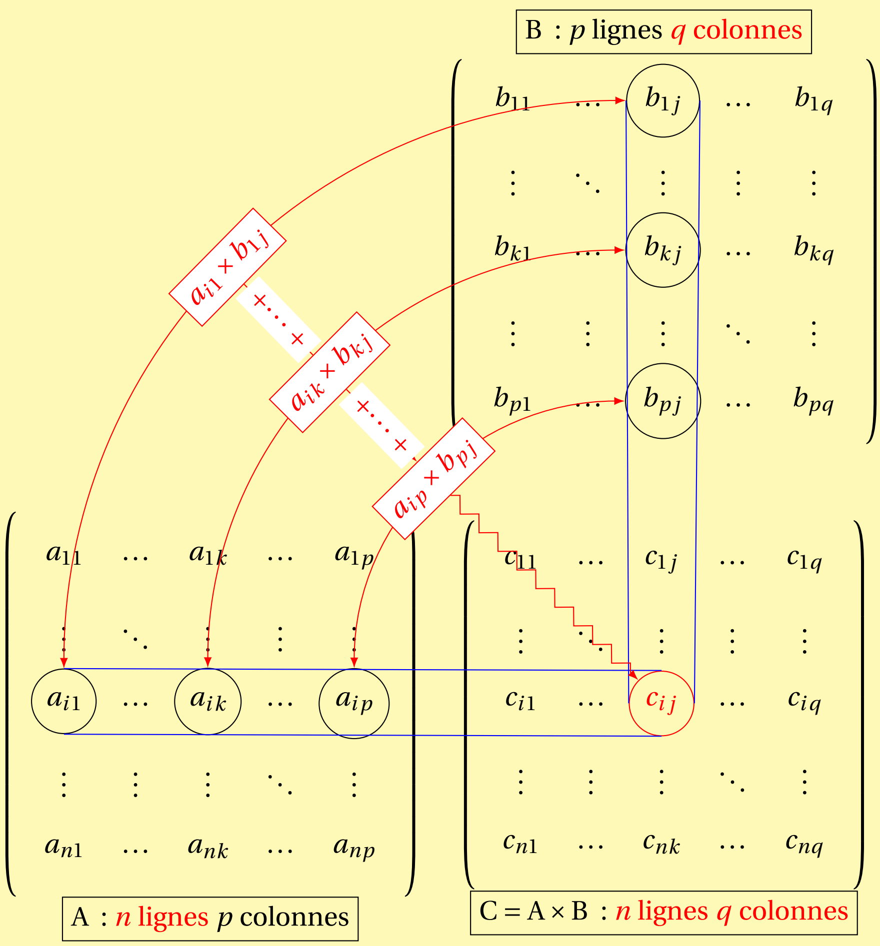
Produit d'une matrice par une matrice colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Méthode.

On obtient le terme situé à la ligne i et la colonne j en multipliant chaque terme de la ligne i de la première matrice par ceux de la colonne j de la deuxième matrice puis en sommant ces produits.

On multiplie les lignes de A par les colonnes de B suivant le schéma ci-dessous :



Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 29 \\ 35 & 62 & 68 \\ 50 & 98 & 107 \end{pmatrix}$

c_{11} vient de $1 \times (-4) + 2 \times 3 + 3 \times 6$.

c_{32} vient de $7 \times 5 + 8 \times 0 + 8 \times 7$.

Propriété 3.

A, B et C sont trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :

- associativité : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$;
- distributivité à gauche : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;
- distributivité à droite : $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$;

Attention ! en général $A \times B \neq B \times A$ (il n'y a pas commutativité).

Démonstration.

Démonstrations assez longues, basées sur les définitions des opérations matricielles et les propriétés des opérations avec les réels.

Propriété 4.

Pour toute matrice carée de taille n on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Démonstration.

Application directe des définitions de la matrice identité et du produit matriciel.

2.3.1 Inverse d'une matrice

Théorème 2 (Matrice inverse)**.**

Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$. On appelle **matrice inverse** la matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$ où I_n est la matrice identique de dimension $n \times n$.

Cette matrice est notée A^{-1}.

Exemple

On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculons les produits $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

les deux matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

3 Application : Résolution d'un système linéaire

Définition 7.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls , on appelle système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2, ..., x_p tout système $(\mathscr{S})$ du type :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,j}x_j & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \\ a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,j}x_j & + & \cdots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,j}x_j & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Où $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{R}$

- La matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la **matrice du système**.
- Le n-uplet $(b_1, b_2, ..., b_n)$ est appelé **second membre** du système. Lorsque $b_1 = ... = b_n = 0$ on dit que le système est **homogène** ou que le système est **sans second membre**.
- On appelle **solution du système** toute p-liste $(x_1, x_2, ..., x_p)$ vérifiant les n équations de $(\mathscr{S})$.
- Le système $(\mathscr{S})$ est **compatible** s'il admet au moins une solution. Tout système homogène est compatible puisqu'il admet au moins la solution $(0, 0, ..., 0)$.
- Le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant les b_i par 0 est le **système homogène associé** à $(\mathscr{S})$.

Exemple

On considère le système de trois équations à trois inconnues : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_3 - x_1 & = & 1 \end{array}\right.$

Ce système n'est pas compatible car si (x_1, x_2, x_3) était une solution, en sommant les équations on obtiendrait $0 = 3$.

Le système homogène associé : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_3 - x_1 & = & 0 \end{array}\right.$

admet pour solutions tous les triplets de la forme $(\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Interprétation matricielle

Si A est la matrice du système $(\mathscr{S})$, alors en posant : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

le système $(\mathscr{S})$ s'écrit $AX = B$.

Réciproquement : si l'on se donne des matrices A de taille $n \times p$ et B de taille $n \times 1$, la recherche d'une matrice X de taille $p \times 1$ vérifiant AX = B se traduit par un système linéaire.

Exemple

Le système suivant $\left\{\begin{array}{l} 5x - y = 7 \\ -9x + 2y = 8 \end{array}\right.$ peut se mettre sous la forme : $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour résoudre le système $A \times X = B$, si A est inversible, on peut multiplier les deux membres à gauche par A^{-1} en conservant une égalité (attention au sens, la multiplication des matrices n'étant pas commutative).
$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$, et donc ($A^{-1} \times A$ étant la matrice identité), on a $X = A^{-1} \times B$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, on aurait $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 103 \end{pmatrix}$

3.1 Systèmes de Cramer

Définition 8.

Si $(\mathscr{S})$ est un système linéaire de n équations à n inconnues, il est équivalent de dire :

- le système $(\mathscr{S})$ admet une et une seule solution,
- le système homogène associé $(\mathscr{S}_0)$ ne possède que la solution triviale $(0, 0, \cdots, 0)$,
- la matrice du système est inversible.

On appelle **système de Cramer** tout système linéaire de n équations à n inconnues vérifiant l'une des propriétés précédentes.

Résolution d'un système de Cramer par la méthode du pivot de Gauss

Étant donné un système de Cramer $(\mathscr{S})$ d'écriture matricielle AX = B, la méthode du pivot de Gauss permet, par des opérations élémentaires sur les lignes de A, de transformer la matrice A en une matrice triangulaire. En faisant les mêmes opérations sur les lignes du second membres B, on obtient un système équivalent à $(\mathscr{S})$ c'est à dire qui possède les mêmes solutions. Le fait essentiel dont on se sert ici est qu'on ne change pas une relation d'égalité en faisant les mêmes opérations sur chaque membre de l'égalité.
Comme ce système équivalent est triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale, on peut résoudre ce dernier de proche en proche.
En particulier, cette méthode est utilisée pour inverser une matrice A en résolvant le système AX = Y.

Précisons les opérations que l'on appelle opérations élémentaire :

- Multiplier une ligne par un nombre réel non nul
- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne
- Échanger la position de deux lignes

Illustrons ceci par un exemple.

Exemple

Pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, résolvons le système : $\begin{cases} x + y + z + t = X \\ x + 2y + 3z + 4t = Y \\ x + 3y + 6z + 10t = Z \\ x + 4y + 10z + 20t = T \end{cases}$

Le coefficient de la variable x étant le même dans toutes les équations on soustrait (par exemple) la première ligne à toutes les autres (ce qui nous donne un système équivalent) de façon à ce que la variable x n'appraisse plus que dans la première équation.

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \quad y + 2z + 3t = Y - X \\ \quad 2y + 5z + 9t = Z - X \\ \quad 3y + 9z + 19t = T - X \end{cases}$$

De la même façon, nous cherchons à éliminer des troisième et quatrième équations la variable y. À l'aide de la deuxième équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \quad y + 2z + 3t = Y - X \\ \quad\quad z + 3t = Z + X - 2Y \\ \quad\quad 3z + 10t = T + 2X - 3Y \end{cases}$$

Finalement il ne nous reste plus qu'à éliminer la variable z de la quatrième équations pour que le système soit triangulaire. À l'aide de la troisième équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \quad y + 2z + 3t = Y - X \\ \quad\quad z + 3t = Z + X - 2Y \\ \quad\quad\quad t = -X + 3Y - 3Z + T \end{cases}$$

La solution est alors donnée par $\begin{cases} t = -X + 3Y - 3Z + T \\ z = Z + X - 2Y - 3t = 4X - 11Y + 10Z - 3T \\ y = Y - X - 2z - 3t = -6X + 14Y - 11Z + 3T \\ x = X - y - z - t = 4X - 6Y + 4Z - T \end{cases}$

L'inverse de A est donc : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Résoudre un système de Cramer est donc équivalent à inverser la matrice qui le défini. Intéressons-nous à une méthode pour calculer directement l'inverse d'une matrice : l'algorithme du pivot de Gauss.

Concrètement, on crée un tableau avec à gauche la matrice à inverser, et à droite la matrice identité. On réalise ensuite une suite d'opérations élémentaires sur la matrice à inverser pour la ramener à l'identité. La même suite d'opérations élémentaires effectuée sur la matrice identité donne l'inverse de la matrice de départ.

Méthode.

Inversons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tout d'abord écrivons : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puis utilisons les opérations élémentaires dans le but de « transformer » la matrice de gauche en matrice identité. Attention à faire les opérations élémentaires (seulement) sur tout le tableau.

$$\begin{array}{c} L_2 - L_1 \longrightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \longrightarrow L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 + L_2 \longrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{4}L_3 \longrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 - 2L_3 \longrightarrow L_1 \\ L_2 + L_3 \longrightarrow L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$L_1 - L_2 \longrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

La matrice inverse est donc : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$