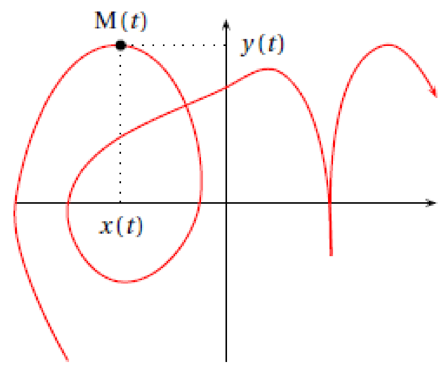
CHAPITRE

5 Fonctions vectorielles

Sommaire

On identifiera dans tout ce chapitre, le plan euclidien $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormal direct. On notera I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (ou une réunion de tels intervalles).
Nous allons apprendre ici à étudier les courbes du plan. Elles peuvent être vues comme la trajectoire d'un mobile dans le plan et il y aura de nombreuses analogies dans ce chapitre avec celui de cinématique en science physique.

Se donner une telle courbe revient à se donner un couple de fonctions (x, y) définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La courbe est alors le sous-ensemble du plan formé par les points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ quand le temps t parcourt l'intervalle I.



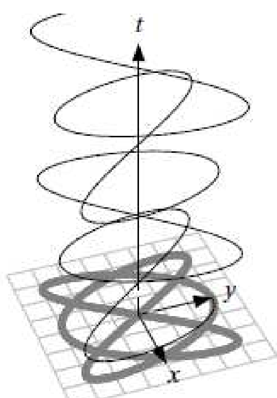
Même si on va utiliser les outils appris au lycée pour étudier les graphes des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, on comprend que le problème est ici très différent. Une courbe du plan n'est en général pas le graphe d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ comme on s'en convaincra en examinant le dessin ci contre.

Aussi il faudra développer de nouvelles techniques.

Pour une fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{cases}$$

il faudra définir ce qu'est une limite et une dérivée.



Lors de la représentation de la courbe, il faudra comprendre que ce n'est pas le graphe de la fonction $\overrightarrow{F}$ qui est dessiné (ce graphe est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$) mais la projection de ce graphe sur le plan (x, y). Aussi la variable t n'est pas représentée sur le dessin. Par contre, un mobile ayant cette courbe comme trajectoire se trouve à la position $(x(t), y(t))$ au temps t.

Les courbes paramétrées peuvent présenter des branches infinies, ce qui signifie que le mobile se déplaçant suivant cette courbe part à l'infini, ou des points stationnaires (le vecteur vitesse du mobile en ce point est nul). Il faudra être en mesure de pouvoir étudier ces deux phénomènes afin de bien représenter la courbe.
De nombreuses courbes paramétrées peuvent être étudiées avec les outils d'analyse de lycée. Par contre, afin d'étudier les branches infinies ou les points stationnaire de certaines autres, il faudra disposer d'un outil plus sophistiqué, les développements limités.

1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie sur I est donnée par un couple (x, y) de fonctions réelles définies sur I. Les fonctions $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ s'appellent les composantes de $\overrightarrow{F}$ ou les applications coordonnées de $\overrightarrow{F}$ et :

$$\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}\right.$$

Définition 2.

Soient $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $t_0 \in I$ et $\overrightarrow{F}$ une application vectorielle définie sur I. On dit que $\overrightarrow{F}(t)$ converge vers l quand t tend vers t_0 et on note : $\overrightarrow{F}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{l}$ lorsque $||\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{l}|| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 1.

Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction vectorielle donnée par le couple (x, y) sur I. Soit $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On a : $\overrightarrow{F}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{l} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x(t) & \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} & l_1 \\ y(t) & \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} & l_2 \end{array}\right.$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{l} \quad & \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - l_1)^2 + (y(t) - l_2)^2} = ||\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{l}|| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad (x(t) - l_1)^2 + (y(t) - l_2)^2 \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x(t) & \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} & l_1 \\ y(t) & \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} & l_2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Définition 3.

On dit qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dérivable en $t_0 \in I$ si il existe un vecteur de $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{l}$$

Dans le cas où cette limite existe, on notera $\overrightarrow{F}'(t_0) = \overrightarrow{l}$. De plus, on dira que $\overrightarrow{F}$ est dérivable sur I si $\overrightarrow{F}$ est dérivable en tout point t de I non situé à une extrémité de I.

Proposition 2.

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les deux fonctions réelles qui la composent : x et y sont dérivables en t_0. On a alors :

$$\overrightarrow{F}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

Démonstration.

Considérons la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\theta} : \begin{cases} I \backslash \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} \end{cases}$$

ses fonctions coordonnées sont :

$$\theta_1 : \begin{cases} I \backslash \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_2 : \begin{cases} I \backslash \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{cases}$$

En appliquant la proposition précédente, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned} x \text{ et } y \text{ sont dérivables en } t_0 &\iff \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ vérifient } \theta_1(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} x'(t_0) \text{ et } \theta_1(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} y'(t_0) \\ &\iff \overrightarrow{\theta}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} (x'(t_0), y'(t_0)) \\ &\iff \overrightarrow{F} \text{ est dérivable en } t_0 \text{ et } F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

De manière plus générale, on dira que :

Définition 4.

- Une fonction $\overrightarrow{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est k fois dérivable sur I si ses fonctions coordonnées le sont.
- Une fonction $\overrightarrow{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si ses fonctions coordonnées sont k fois dérivables sur I et si sa dérivée k-ième est continue.

2 Arcs paramétrés

Définition 5.

On appelle arc paramétré ou courbe paramétrée un couple $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\overrightarrow{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$.

Définition 6.

On appelle support (ou image) de l'arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ l'ensemble des points du plan :

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathcal{P} \,|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t) \right\}$$

Pour tout $t \in I$, on notera $M(t)$ le point du support de l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$.

Remarque

Se donner une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *revient à se donner un arc paramétré* $(I, \overrightarrow{F})$ *où pour tout* $t \in I$, $\overrightarrow{F}(t) = (t, f(t))$

Remarque

L'étude d'un arc paramétré peut s'interpréter ainsi :

- I *est un intervalle de temps.*
- $M(t)$ *est un point mobile du plan dont la position à l'instant* $t \in I$ *est donné par* $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F}(t)$.
- *Le support de l'arc paramétré* $(I, \overrightarrow{F})$ *est appelé trajectoire du mouvement.*
- *Les vecteurs* $\overrightarrow{F}'(t)$ *et* $\overrightarrow{F}''(t)$, *si ils existent, sont respectivement appelés vecteur vitesse et vecteur accélération du point* M *à l'instant* t *.*

2.1 Étude locale d'un arc paramétrée

Définition 7.

Un point $M = M(t_0)$ d'un arc paramétré est dit régulier lorsque $\overrightarrow{F}'(t_0) \neq 0$. Sinon, on dit que c'est un point stationnaire.

Définition 8.

La tangente en $\overrightarrow{F}(t_0)$ à la courbe paramétrée $(I, \overrightarrow{F})$ est, sous réserve d'existence, la limite de la sécante passant par $\overrightarrow{F}(t_0)$ et $\overrightarrow{F}(t)$ quand $t \longrightarrow t_0$.

Proposition 3.

Un arc paramétré possède une tangente en un point régulier $M(t_0)$: la droite passant par $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

Remarque

Il se peut que $\overrightarrow{F}'(t_0) = 0$ et que la courbe admette en $M(t_0)$ une tangente. Par exemple, si on considère le support de $\overrightarrow{F} = (t^2, t^3)$ en $t_0 = 0$, alors il admet en $t_0 = 0$ un vecteur tangent horizontal. Pourtant ce point est stationnaire. On va étudier maintenant deux méthodes pour calculer, quand c'est possible, le vecteur tangent à une courbe en un point stationnaire.

Proposition 4.

Soit $M(t_0)$ un point un point stationnaire d'une courbe paramétrée $(I, \overrightarrow{F})$ où $\overrightarrow{F}$ est donnée par le couple de fonctions (x, y) définies sur I.

- ☞ si $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} m$ où m est un réel alors la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente de pente m.
- ☞ si $\left|\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}\right| \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ alors la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente verticale.

Exemple

Utilisons cette méthode pour calculer un vecteur tangent à la courbe $(I, \overrightarrow{F})$ avec $I = \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{F} = (t^2, t^3)$ en le point stationnaire de paramètre $t = 0$. On a : $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{t^3}{t^2} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc la pente de la tangente en le point stationnaire $(0, 0)$ est 0. Cette droite est l'axe des abscisses.

Définition 9.

On dit que l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ possède une branche infinie en t_0 lorsque $||\overrightarrow{F}(t)|| \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} +\infty$

Définition 10.

Soit $(I, \overrightarrow{F})$ un arc paramétré possédant une branche infinie en $t_0 \in I$. On dit que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ en t_0 si $d(M(t), \mathcal{D}) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 5.

Soit $(I, \overrightarrow{F})$ un arc paramétré possédant une branche infinie en $t_0 \in I$. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ en t_0 si et seulement si $ax(t) + by(t) + c \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$

Démonstration.

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$. La distance du point $M(t)\,(x(t); y(t))$ vaut :

$$d(M(t), \mathcal{D}) = \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cette distance tend vers 0 si et seulement si $ax(t) + by(t) + c \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$

Méthode.

Une seule des deux applications coordonnées de f tend vers l'infini en valeur absolue quand t tend vers t_0 :

1. Si $x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ et $|y(t)| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ alors la droite d'équation $x = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $x(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
2. Si $|x(t)| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $y(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Les deux applications coordonnées de f tendent vers l'infini en valeur absolue quand t tend vers t_0 :

Si $|x(t)| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ et $|y(t)| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$, on forme le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient quand t tend vers t_0.

1. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$: on forme alors $y(t) - ax(t)$ et si cette quantité tend vers une limite finie b alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe en t_0. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$.
2. Si $\left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$, on dit que la courbe possède une branche parabolique (Oy).
3. Si $\left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$, on dit que la courbe possède une branche parabolique (Ox).

Exemple

Intéressons nous à la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{1}{t-1} \\ y(t) & = & \dfrac{t^2+1}{t-1} \end{cases}$$

Elle présente des branches infinies quand $t \longrightarrow 1^{\pm}$ et quand $t \longrightarrow \pm\infty$.

- Si $t \longrightarrow +\infty$.

  Comme $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe quand $t \longrightarrow +\infty$.

- Si $t \longrightarrow -\infty$.

  On montre de même que la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe quand $t \longrightarrow -\infty$.

- Si $t \longrightarrow 1^+$.

  1. On forme le quotient $y(t)/x(t)$ et on cherche sa limite quand $t \longrightarrow 1^+$:

  $$\frac{y(t)}{x(t)} = t^2 + 1 \underset{t\to1}{\longrightarrow} 2$$

  2. On cherche maintenant la limite de $y(t) - 2x(t)$ quand $t \longrightarrow 1$:

  $$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2-1}{t-1} = t + 1 \underset{t\to1}{\longrightarrow} 2$$

     donc la droite d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe quand $t \longrightarrow 1^+$.

  3. On cherche la position de la courbe relativement à l'asymptote. Pour ce faire, on étudie le signe de : $y(t) - 2x(t) - 2 = t - 1 \geq 0$ si $t \geq 1$. Donc la courbe est au dessus de l'asymptote quand $t \longrightarrow 1^+$.

- Si $t \longrightarrow 1^-$.

  La même étude montre que la droite d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe quand $t \longrightarrow 1^-$ et que la courbe est en dessous de l'asymptote dans ce cas.

Par définition, dire qu'une droite est asymptote à la branche infinie quand $t \longrightarrow t_0$ d'une courbe paramétrée signifie que la courbe s'approche infiniment près de la droite quand $t \longrightarrow t_0$. Quand ce phénomène se produit, on sait mieux représenter le support de la courbe étudiée. Malheureusement toutes les branches infinies n'ont pas la même croissance et celles dites paraboliques ne s'approchent pas d'une droite quand $t \longrightarrow t_0$. Par contre on peut parfois trouver des courbes simples qui vont être asymptotes à cette branche parabolique.

2.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

L'étude d'une courbe paramétrée sur tout son domaine de définition n'est pas toujours nécessaire. En effet si la courbe présente certains types de symétries, on peut restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle plus petit.
Pour cela, on interprète géométriquement la position du point $M(\varphi(t))$ par rapport au point $M(t)$ où φ est une certaine transformation. Voyons quelques exemples courants :

- Si $x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$, le point $M(t+T)$ est le même que le point $M(t)$. On aura tracé toute la courbe si on restreint l'étude au paramètre t qui varie dans un intervalle de la forme $[a, a+T[$.
- Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique orthogonal du point $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Il suffit de tracer la courbe pour $t \in [0, +\infty[$ et de compléter le dessin final par une symétrie par rapport à (Ox).
- Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, +\infty[$ et de compléter le tracé par une symétrie de centre l'origine.
- Si $x(1/t) = -x(t)$ et $y(1/t) = y(t)$, les points $M(1/t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Oy). Si on trace la portion de courbe pour $t \in]0, 1]$, la portion correspondant à $t \in [1, +\infty[$ s'en déduit par une symétrie par rapport à l'axe (Oy).

Méthode.

1. Déterminer le domaine de définition des deux fonctions x et y.
2. Étudier les symétries éventuelles.
3. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et repérer dans ce tableau les points stationnaires, les points à tangente horizontale ou verticale et les branches infinies.
4. Étudier les points stationnaires.
5. Étudier les branches infinies.
6. Tracer sommaire de la courbe. Il est inutile d'utiliser la calculatrice pour reporter des points, il suffit de placer les asymptotes éventuelles, de mettre en évidence les points stationnaires et d'avoir l'allure globale de la courbe.