CHAPITRE

5 Fonctions de deux variables

Sommaire

1 Fonctions de deux variables à valeurs réelles

Définition 1.

Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$ est l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à E et le second à F.

Si $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Remarque

Cette définition se généralise aisément. Si $E_1, ..., E_n$ désignent n ensembles. On note $E = E_1 \times ... \times E_n$ le produit cartésien défini par :

$E = \{(e_1, ..., e_n)$ *, tel que* $e_1 \in E_1, ..., e_n \in E_n\}$

Exemple

On définit par exemple l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$. L'élément $(2, \pi)$ appartient à $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$.

Dans cette leçon nous utiliserons particulièrement l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.

Soit $\mathcal{D}$, une partie de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire un ensemble de couples de réels (x, y).

On appelle fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D}$, le procédé qui consiste à associer à chaque couple (x, y) de $\mathcal{D}$ un réel unique. On note généralement : $f(x, y) = z$.

Exemple

— Surface d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

— Dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

— Dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \longmapsto f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est : $\mathcal{D} = \{M(x, y) | x + y - 1 > 0\}$.

Il correspond à un demi plan ouvert (faire un schéma).

— Dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \longmapsto f(x, y) = \arccos(x) + \arccos(y)$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est : $\mathcal{D} = \{M(x, y) |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$.

L'ensemble de définition est le carré fermé de centre O. (Faire un schéma).

Définition 3.

Soit f une fonction de 2 variables définie sur $\mathcal{D}$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- On appelle application partielle suivant x en y_0 la fonction $g(x) = f(x, y_0)$.
- On appelle application partielle suivant y en x_0 la fonction $h(y) = f(x_0, y)$.

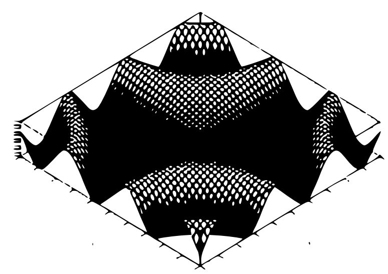
1.1 Représentation graphique d'une fonction à deux variables

Définition 4.

Soit f, une fonction de deux variables définie sur un domaine $\mathcal{D}$. L'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) avec $z = f(x, y)$, pour (x, y) parcourant $\mathcal{D}$ est appelé **surface d'équation** $z = f(x, y)$ ou **surface représentative** de la fonction f.

Remarque

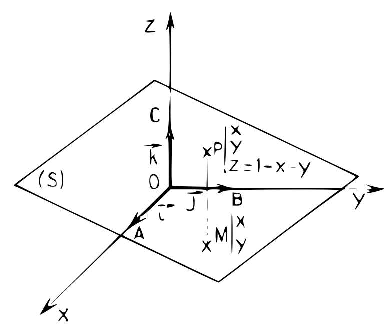
Représenter graphiquement une fonction de plusieurs variables n'est possible que pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est représentée en dimension 3 par la surface d'équation $z = f(x, y)$. La figure ci-contre montre une représentation de la surface d'équation $z = \sin(xy)$.



Exemple

On considère $f(x, y) = 1 - x - y$.

On sait que $z = 1-x-y \iff x+y+z = 1$ est l'équation d'un plan. La fonction f, définie dans $\mathbb{R}^2$ admet donc pour surface représentative le plan (ABC).

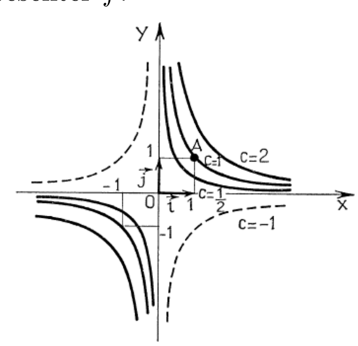


En pratique il est souvent difficile de construire la surface représentative d'une fonction. On peut :

— Soit considérer les sections de la surface par des plans parallèles à xOy (z constant). On obtient ainsi par projection une famille de courbes d'équation $f(x, y) = C$ (constante) appelées courbes de niveau dont l'ensemble, gradué suivant les valeurs de C, peut servir à représenter f.

Exemple

Les courbes de niveau de la fonction $f(x, y) = xy$ sont les courbes du type $xy = C$ avec $C \in \mathbb{R}^*$. On appelle ces courbes hyperboles équilatères.



— Soit considérer les sections de la surface par des plans parallèles à yOz (x est constante) ou à xOz (y est constante). On obtient encore des familles de courbes d'équation $z = f(x_0, y)$ ou $z = f(x, y_0)$ utiles pour l'étude de f.

Exemple

On souhaite représenter la surface d'équation $z = x^2 + y^2$

- On constate pour la construction graphique que l'intersection de la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et du plan d'équation $z = k$, pour $k > 0$ est un cercle de rayon $\sqrt{k}$. En effet, dans le plan xOy, le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R, décrit par l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- Si l'on fixe la variable x en x_0 par exemple on obtient l'équation $z = y^2 + x_0^2$ autrement dit une parabole dans le plan parallèle à yOz passant par x_0.
  On a la même chose en fixant la variable y.

Ces deux représentations nous permettent de se rendre compte de la surface que représente l'équation $z = x^2 + y^2$. (faire un schéma)

1.2 Continuité

Définition 5.

Dans un espace produit $E \times F$, on dit qu'une suite de points $M_n(x_n; y_n)$ tend vers vers un point $M(x, y)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

- La suite (x_n) tend vers x
- La suite (y_n) tend vers y

Définition 6.

Soit f une fonction de 2 variables définie sur un domaine $\mathcal{D}$. f est continue en M_0 si :

- f est définie au voisinage de M_0
- $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ quand M tend vers M_0.

Exemple

La fonction $f(x, y) = x + y - 1$ est continue en $M_0(1, 1)$. En effet,

- $f(M_0) = 1$
- $f(M)$ tend vers 1 lorsque M tend vers M_0 c'est à dire lorsque x et y tendent vers 1.

Définition 7.

Une fonction $f(x,y)$ de 2 variables est continue suivant x si et seulement si lorsque y est fixé en y_0 la fonction $f(x,y_0)$ est continue.

Une fonction continue par rapport à chacune de ses variables n'est pas nécessairement continue !

Exemple

Considérons la fonction définie par : $\begin{cases} f(x,y) & = & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ f(0,0) & = & 0 & \end{cases}$

La fonction $g(x) = f(x,0)$ est continue en $x = 0$, de même la fonction $h(y) = f(0,y)$ est continue en $y = 0$

Mais la fonction n'est pas continue en $(0,0)$, pour voir cela il suffit de considérer la suite $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ qui tend vers $(0,0)$ mais $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = 1$ donc ne tend pas vers $f(0,0)$.

Propriété 1.

Soit f une fonction de 2 variables définie sur un domaine $\mathcal{D}$. Alors si f est continue, ses applications partielles le sont aussi.

1.3 Dérivées partielles

Définition 8.

Soit f une fonction de 2 variables définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$. On considère les fonctions

$$\begin{cases} g(x) & = & f(x,y_0) \\ h(y) & = & f(x_0,y) \end{cases}$$

Alors si g est dérivable, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point M_0 la dérivée de g en x_0.

On note : $g'(x_0) = f'_x(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

On définit de même la dérivée partielle de f par rapport à y en M_0.

On note : $h'(y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Si ces dérivées sont définis sur $\mathcal{D}$, elles définissent deux nouvelles fonctions, les fonctions dérivées partielles :

$$(x,y) \xrightarrow{f'_x} f'_x(x,y) \qquad (x,y) \xrightarrow{f'_y} f'_y(x,y)$$

Exemple

- Soit la fonction $f(x,y)=x^2+3y^2-2xy$ alors :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= 2x-2y \\ f'_y(x,y) &= 6y-2x \end{cases}$$

- Soit la fonction $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ alors :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f'_y(x,y) &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

`On démontre ( avec la fonction` $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ `par exemple ) que l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité de la fonction en ce point contrairement au cas de fonctions à 1 variable.`

1.3.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si f'_x et f'_y sont elles-mêmes partiellement dérivables on peut définir les dérivées partielles secondes :

Définition 9.

- f'_x se dérive en : $f''_{xx}=f''_{x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $f''_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- f'_y se dérive en : $f''_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $f''_{yy}==f''_{y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par : $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ alors

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\dfrac{-y}{x^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ f'_y(x,y) &= \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; & f''_{xy}(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ f''_{xy}(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; & f''_{y^2}(x,y)=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Théorème 1.

Si f''_{xy} et f''_{yx} sont continues au voisinage de $M_0(x_0,y_0)$ alors : $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

Ce théorème montre qu'il n'y a que trois dérivées partielles du deuxième ordre distinctes. Il est parfois commode d'utiliser les notations de Monge :

$p=f'_x(x,y)\,; \quad q=f'_y(x,y)$

$r=f''_{x^2}(x,y)\,; \quad s=f''_{xy}(x,y)\,; \quad t=f''_{y^2}(x,y)$

1.4 Dérivée d'une fonction composée

Définition 10.

Soit f une fonction de deux variables x et y. Si x et y sont des fonctions d'une variable t on peut définir la fonction composée : $F(t) = f(x(t), y(t))$

Lorsque f admet des dérivées partielles continues et les fonction $x(t)$, $y(t)$ sont dérivables, on peut calculer la dérivée de F qui est une fonction réelle.

Soit $\Delta t = t - t_0$ un accroissement de t, h et k les accroissements correspondants de x et y :

$$\begin{cases} x(t_0 + \Delta t) & = & x_0 + h \\ y(t_0 + \Delta t) & = & y_0 + k \end{cases}$$

$\Delta F = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$

ou encore : $\Delta F = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$

Les variations de x et y étant ainsi séparées on peut appliquer à chacun des crochets la formule des accroissements finis (la formule est rappelée un peu plus loin) : $\Delta F = hf'_x(c_x, y_0 + k) + kf'_y(x_0 + h, c_y)$

avec $c_x \in]x_0; x_0 + h[$ et $c_y \in]y_0; y_0 + k[$ (les bornes des intervalles sont choisies arbitrairement)

Ainsi $\dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{h}{\Delta t} f'_x(c_x, y_0 + k) + \dfrac{k}{\Delta t} f'_y(x_0 + h, c_y)$.

Maintenant si $\Delta t \to 0$, $h \to 0$ et $k \to 0$ alors d'après l'hypothèse de continuité des dérivées partielles :

$f'_x(c_x, y_0 + k) \to f'_x(x_0, y_0)$ et $f'_y(x_0 + h, c_y) \to f'_y(x_0, y_0)$

Et d'autre part,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{h}{\Delta t} & = & \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x_0}{\Delta t} \to x'(t_0) \\ \dfrac{k}{\Delta t} & = & \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y_0}{\Delta t} \to y'(t_0) \end{array}$$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \times x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \times y'(t_0)$

Proposition 1.

Soient x et y des fonctions rélles d'une variable t réelles définies et dérivables à valeurs dans un domaine $\mathcal{D}$.

Soit f une fonction de 2 variables définie sur $\mathcal{D}$ possédant des dérivées partielles continues sur $\mathcal{D}$. Alors $F(t) = f(x(t), y(t))$ est bien définie et dérivable de dérivée :

$$F'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \times x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

1.5 Fonction composée de deux variables

Si x et y sont deux fonctions de deux variables u et v on peut encore définir une fonction composée : $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

On démontre de la même façon que : $\begin{cases} F'_u &= f'_x \times x'_u + f'_y \times y'_u \\ F'_v &= f'_x \times x'_v + f'_y \times y'_v \end{cases}$

On dispose alors d'une écriture matricielle : $\begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix}$ est appelée **matrice jacobienne** du changement de variables.

Exemple

Nous disposons du changement de coordonnées polaire : $\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$

Notons $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

Alors, $F'_r = f'_x \times x'_r + f'_y \times y'_r = f'_x \times \cos\theta + f'_y \times \sin\theta$ $F'_\theta = f'_x \times x'_\theta + f'_y \times y'_\theta = f'_x \times (-r\sin\theta) + f'_y \times (r\cos\theta)$

ou $\begin{pmatrix} F'_r \\ F'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

1.6 Formule des accroissements finis

On rappelle que pour une fonction d'une variable, continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

Soit maintenant f une fonction de deux variables continue et dont les dérivées partielles sont également continues au « voisinage » d'un point M_0.

On souhaite exprimer l'accroissement de f pour un point M assez proche de M_0 :

$$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0)$$

On considère alors une fonction auxiliaire : $F(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$ alors $\Delta f = F(1) - F(0)$.

F est continue et dérivable et en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées on a :

$$F'(t) = hf'_x(x_0+th, y_0+tk) + kf'_y(x_0+th, y_0+tk)$$

La formule des accroissements finis appliquée à F s'écrit donc :

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

Avec $\theta \in]0, 1[$.

D'où $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ avec $\theta \in]0, 1[$

Remarque

Ici il s'agit de décrire les variations entre $f(M)$ et $f(M_0)$ en considérant les variations de f suivant le segment $[MM_0]$. Si l'on note m le point de coordonnées $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, qui appartient au segment $[MM_0]$, alors la formule précédente sécrit ponctuellement : $f(M) - f(M_0) = hf'_x(m) + kf'_y(m)$.

Propriété 2.

Une fonction de deux variables est constante au voisinage d'un point si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles en tout point de ce voisinage.

Démonstration.

Considérons tout d'abord que la fonction est constante alors quel que soit le point m considéré le taux de variation, suivant x par exemple, sera toujours nul en conséquence la dérivée partielle suivant x aussi. Réciproquement, si $f'_x(m) = f'_y(m) = 0$ pour tout point m alors :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(m) - (y - y_0)f'_y(m) = 0$$

Donc $f(x, y) = f(x_0, y_0) = \text{constante}$

1.7 Formule de Taylor

Théorème 2.

Soit f une fonction à deux variables qui admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 au voisinage d'un point M_0. Alors pour tout point M dans ce voisinage on a :

$$f(M) = f(M_0) + hf'_x(M_0) + kf'(M_0) + \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2}\right](x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

Démonstration.

Considérons à nouveau la fonction auxiliaire : $F(t) = f((x_0 + th, y_0 + tk)$ (elle décrit suivant le segment $[M_0M]$ les variations de f)

Si F est dérivable à l'ordre 2 au voisinage de M_0 elle vérifie les hypothèses de la formule de Taylor et on a : $F(1) = F(0) + F'(0) + \dfrac{1}{2}F''(\theta)$ avec $0 < \theta < 1$.

Or on a vu que : $F'(t) = hf'_x(x_0 + th, y_0 + tk) + kf'_y(x_0 + th, y_0 + tk)$

En appliquant la même règle de dérivation :

$F''(t) = h[hf''_{x^2} + kf''_{xy}] + k[hf''_{yx} + kf''_{y^2}] = h^2f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2f''_{y^2}$

On obtient bien :

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+\left[hf'_x + kf'_y\right](x_0, y_0)+\dfrac{1}{2}\left[h^2f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2f''_{y^2}\right](x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

Remarque

La formule de Taylor se généralise à l'ordre n lorsque la fonction admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.

1.7.1 Applications

Rappelons, qu'une fonction réelles de deux variables admet un maximum en un point $M_0(x_0, y_0)$ sur un ensemble $\mathcal{D}$ si $f(M) \leq f(M_0)$ pour tout point M de $\mathcal{D}$. C'est à dire si pour tout point M de $\mathcal{D}$ $f(M) - f(M_0) \leq 0$

De la même façon, f admet un minimum en M_0 si pour tout point M de $\mathcal{D}$ on a $f(M) - f(M_0) \geq 0$.

Propriété 3.

Si f admet des dérivées partielles en M_0 et si M_0 est un extremum, alors :

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$$

Démonstration.

Si M_0 est un extremum, les fonctions d'une seule variable $g(x) = f(x, y_0)$ et $h(y) = f(x_0, y)$ admettent un extremum respectivement pour $x = x_0$ et $y = y_0$.

C'est donc que $g'(x_0) = h'(y_0) = 0$ ou que $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

⚠ La relation $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$ n'implique pas que M_0 est un extremum !

Exemple

Considérons $f(x,y)=x^2-y^2$ alors $\left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & = & 2x \\ f'_y(x,y) & = & -2y \end{array}\right.$

Les dérivées partielles s'annulent en 0 mais $f(x,y)$ ne garde pas un signe constant au voisinage de 0. Ainsi $f(1,0)>0$ et $f(0,1)<0$.

Lorsque les conditions $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$ sont remplies, la formule de Taylor permet de préciser la nature du point M_0. Dans ce cas elle s'écrit : $f(M)=f(M_0)++\frac{1}{2}\left(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2}\right)(m)$ pour $m\in[MM_0]$.

Le signe de $f(M)-f(M_0)$ est donc celui de $\left(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2}\right)(m)$ ou encore celui de $\left(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2}\right)(M_0)$ car l'expression étant continue pour un voisinage assez proche de M_0 elle garde un signe constant.

En utilisant le notations de Monge et en considérant $k\neq 0$ (on aurait pu choisir h) on obtient :

$\left(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2}\right)(M_0)=h^2r+2hks+k^2t=k^2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2r+2\frac{h}{k}s+t\right].$

Méthode.

Si les dérivées secondes ne sont pas nulles en M_0, $f(M)-f(M_0)$ a le signe du trinôme du second degré dont la variable est $\frac{h}{k}$. Deux cas sont possibles :

1. $\Delta=s^2-rt<0$, le trinôme garde le signe de r
   - si $r=f''_{x^2}(M_0)>0$, $f(M)-f(M_0)>0$, M_0 est un minimum.
   - si $r=f''_{x^2}(M_0)<0$, $f(M)-f(M_0)<0$, M_0 est un maximum.
2. $\Delta=s^2-rt>0$, le trinôme ne garde pas un signe constant : M_0 n'est pas un extremum.

Remarque

— *Si $\Delta=s^2-rt=0$, il faut utiliser la formule de Taylor à l'ordre 3 ou plus.*

— *Si les dérivées partielles d'ordre 2 s'annulent, il faut utiliser la formule de Taylor au premier ordre où les dérivées partielles ne s'annulent pas.*

Exemple

Trouver les extremum de la fonction $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

La fonction est la composée de sommes et produit suivant les variables x et y et donc continue, infiniment dérivable.

$\left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & = & 3(x^2-y) \\ f'_y(x,y) & = & 3(y^2-x) \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lcl} f'_{x^2}(x,y) & = & 6x \\ f'_{xy}(x,y) & = & -3 \\ f'_{y^2}(x,y) & = & 6y \end{array}\right.$

$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ pour $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Au voisinage de 0 : $f(x,y) \sim -3xy$, l'origine n'est pas un extremum.

Au voisinage de $M_0(1,1)$: posons $\begin{cases} x = 1+h \\ y = 1+k \end{cases}$

La formule de Taylor à l'ordre 2 permet d'écrire $f(x,y) - f(1,1) \sim 3(h^2 - hk + k^2) = 3k^2 \left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 - \frac{h}{k} + 1\right]$

Ici $\Delta < 0$ donc pour tout h et k $h^2 - hk + k^2 > 0$.

$f(x,y) - f(1,1) > 0$ et le point $M_0(1,1)$ correspond à un minimum de la fonction.

2 Intégrale multiple

En première année vous avez vu qu'à une fonction f, continue sur $[a,b]$ on peut associer le nombre $I(f)$, intégrale de f sur $[a,b]$, défini par :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) \qquad x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$$

La suite des x_i constituant une subdivision de $[a,b]$. Nous allons étendre cette notion au cas des fonctions à deux variables.

2.1 Intégrale double sur un rectangle

Considérons une fonction **continue** à deux variables sur un rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ du plan $\mathbb{R}^2$. Il s'agit ici de généraliser la situation rencontrée avec les intégrales simples.

Pour cela, nous effectuons une partition du segment $[a,b]$ et du segment $[c,d]$, ce qui nous donne les suites de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ dans $[a,b]$ et $(y_k)_{0 \leq k \leq p}$ dans $[c,d]$ avec

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \text{et} \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = d$$

Le rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ est ainsi découpé en rectangles élémentaires $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$.

On définit la somme $\mathcal{S} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_j, y_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$.

En posant : $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ et $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

On a $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k$

On peut alors démontrer que si f est **continue** sur $\mathcal{R}$, la somme précédente admet une limite quand le nombre de rectangles élémentaires augmente indéfiniment c'est à dire quand n et p tendent vers l'infini avec $\lim_{j \longrightarrow +\infty} \Delta x_j = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \Delta y_k = 0$

Définition 11.

Soit f une fonction continue à deux variables, on appelle intégrale double de la fonction f la limite suivante : $I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \lim\limits_{\substack{j \to +\infty \\ k \to +\infty}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k$

On dit alors que f est intégrable sur le domaine $\mathcal{R}$.

Remarque

Dans cette définition plusieurs choix sont faits :

- *une subdivision particulière de chaque segment (donc du rectangle)*
- *le point (x_j, y_k) dont on prend l'image par f pour calculer la somme*

Tout un travail de démonstration, que nous ne faisons pas, consiste à montrer que la définition précédente est indépendante de ces choix. C'est à dire que la limite sera la même quelle que soit les subdivisions de plus en plus fines choisies ainsi que les points appartenant aux rectangles élémentaires.

Remarque

- *Si l'on prend f, la fonction constante égale à 1 sur le rectangle $\mathcal{R}$ alors :*
  $I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} 1\,dxdy = \int\int_{\mathcal{R}} dxdy = (b-a)(d-c) = Aire(\mathcal{R})$
- *Comme pour les intégrales simples, lorsque $f(x,y) \geq 0$, la limite possède une interprétation géométrique : c'est le **volume** de la région $\mathcal{V}$ de l'espace comprise entre le graphe Γ_f de f, la plan horizontal $z = 0$ (ou xOy) et la quatre plans $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$.*

? **Exercice**

Faites des schémas des situations évoquées dans la définition et les remarques précédentes.

Proposition 2.

Soient f et g deux fonctions à deux variables continues sur un rectangle $\mathcal{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Linéarité : $I(f + \lambda g) = I(f) + \lambda I(g)$
  Ou $I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} f(x,y) + \lambda g(x,y)\,dxdy = \int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy + \lambda \int\int_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dxdy$
- Monotonie : Si pour tout $(x,y) \in \mathcal{R}$ $f(x,y)dxdy \leq g(x,y)$, alors $I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} f(x,y) \leq \int\int_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dxdy$
- $\left|\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy\right| \leq \int\int_{\mathcal{R}} |f(x,y)|\,dxdy$

Démonstration.

1. La première propriété est une application des propriétés d'opérations sur les limites de suites convergentes.
2. De la même façon, en partant du fait que les sommes finies sur les mêmes subdivisions et aux mêmes points conservent l'inégalité entre les fonctions, en passant aux limites cette inégalité est conservée.
3. Il suffit de remarquer que $f(x, y) \leq |f(x, y)|$ et $-f(x, y) \leq |f(x, y)|$ et d'appliquer les deux premières propriétés.

2.1.1 Théorème de Fubini sur un rectangle

Soit $\mathcal{R}$ un rectangle est f une fonction à deux variables continues sur $\mathcal{R}$.
On a vu que : $I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{j \to +\infty \\ k \to +\infty}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k$.
Soit la somme : $S_j = \sum_{k=1}^{p} f(x_j, y_k)(y_{k+1} - y_k)$ dans laquelle x_j est fixé.
Si l'on fait tendre p vers l'infini, par définition de l'intégrale simple on a : $S_j \longrightarrow K(x_j) = \int_c^d f(x_j, y)dy$
Par suite on considère la somme : $S'_n = \sum_{j=1}^{n} K(x_j)(x_{j+1} - x_j)$ et il se trouve que si l'on considère x comme une variable, la fonction $K(x)$ définie alors une fonction continue de cette variable donc intégrale sur $[a, b]$.
Ainsi, si l'on fait tendre n vers l'infini, par définition de l'intégrale simple, la suite S'_n converge :
$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} K(x_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b K(x)dx$.

? **Exercice**

Shématiquer les différentes situations évoquées précédement.

On peut faire la même construction en commençant par la variable x puis par la variable y.
Le théorème suivant relie ces différentes façons de comprendre une intégrale double et surtout affirme qu'elles sont égales !

Théorème 3 (Théorème de Fubini (sur un rectangle))**.**

Soit f une fonction continue à deux variables sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ du plan $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$I(f) = \int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

2.2 Intégrale double sur un domaine quelconque

Nous allons maintenant définir l'intégrale $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$ pour un domaine $\mathcal{D}$ plus général qu'un rectangle. Les domaines en question seront toujours **bornés** c'est-à-dire contenus dans un certain rectangle $\mathcal{R}$ et délimités par une courbe fermée.

Définition 12.

- On dit qu'un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est **régulier selon l'axe des** x s'il est délimité par deux droites $y = c$ et $y = d$ et deux courbes continues $x = \varphi_1(y)$ et $x = \varphi_2(y)$ avec $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$ pour tout $y \in [c,d]$. On note :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [c,d]\,,\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

- On dit qu'un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est **régulier selon l'axe des** y s'il est délimité par deux droites $x = a$ et $x = b$ et deux courbes continues $y = \psi_1(x)$ et $y = \psi_2(x)$ avec $\psi_2(x) \geq \psi_1(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. On note :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a,b]\,,\ \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$$

- Un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est **régulier** s'il est régulier selon l'axe des y ou l'axe des x.

On peut paver les domaines réguliers de rectangles élémentaires de plus en plus fins et ainsi étendre la définition précédente à ce type de domaine. Les propriétés de l'intégrale double sur un rectangle se généralisent aux domaines réguliers et il en est de même pour le théorème de Fubini qui nous facilitera les calculs.

Théorème 4 (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers)**.**

- Si f est une fonction continue sur un domaine $\mathcal{D}$ régulier selon l'axe des y, alors

$$I(f) = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

- Si f est une fonction continue sur un domaine $\mathcal{D}$ régulier selon l'axe des x, alors

$$I(f) = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Remarque

Si le domaine $\mathcal{D}$ n'est pas régulier, on essaye de le décomposer en plusieurs parties $\mathcal{D}_1$, ..., $\mathcal{D}_p$ qui sont régulières et l'intégrale étendue sur $\mathcal{D}$ se calcule en sommant les intégrales sur les parties $\mathcal{D}_j$.

Proposition 3.

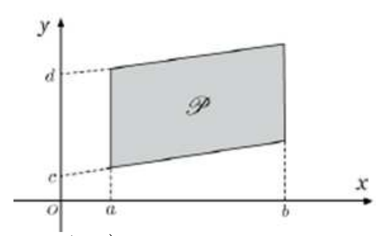
Soient f, g et h trois fonctions de deux variables continues sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) \leq h(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\mathcal{D}$ et soient λ une constante réelle et enfin $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux domaines de $\mathbb{R}^2$ sans points communs sauf, éventuellement, sur leurs frontières. Alors :

- Linéarité : $I(f+\lambda g) = I(f) + \lambda I(g)$
  Ou $I(f+\lambda g) = \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y) + \lambda g(x,y)\, dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy + \lambda \int\int_{\mathcal{D}} g(x,y)\, dxdy$
- Monotonie : $I(f) = \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y) dxdy \leq \int\int_{\mathcal{D}} h(x,y)\, dxdy$
- Inégalité de la moyenne : S'il existe deux constantes α et β, telles que dans $\mathcal{D}$ on ait l'inégalité $\alpha \leq f(x,y) \leq \beta$, alors $\alpha Aire(\mathcal{D}) \leq \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \leq \beta Aire(\mathcal{D})$
  En particulier, il existe un point $P_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = f(P_0)Aire(\mathcal{D})$ (Égalité de la moyenne)
- $\displaystyle\left|\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy\right| \leq \int\int_{\mathcal{D}} |f(x,y)|\, dxdy$
- Additivité : $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy$

2.3 Premières applications

2.3.1 Calculs d'aires

Aire d'un parallélogramme



Tout d'abord observons que le parallégramme $\mathcal{P}$ qui nous intéresse est délimité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$ (qui sont parallèles) et deux droites d'équations $y = \alpha x + c$, $y = \alpha x + d$ (sont-elles parallèles ?).

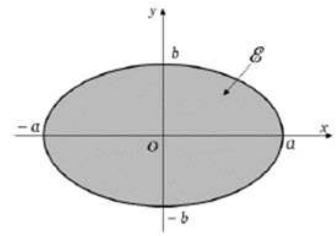
Dans notre cas, le domaine est régulier par rapport à y (mais non par rapport à x) et on a : $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b\,,\, \alpha x + c \leq y \leq \alpha x + d\}$. Alors,

$$\begin{aligned} Aire(\mathcal{P}) &= \int\int_{\mathcal{P}} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha x+c}^{\alpha x+d} dy\right) dx \\ &= \int_a^b ((\alpha x + d) - (\alpha x + c))\, dx = (d-c)\int_a^b dx = (b-a)(d-c) \end{aligned}$$

Aire d'une ellipse

Sans perte de généralité on peut considérer l'ellipse $\mathcal{E}$ que nous allons étudier centrée à l'origine et de demi-axes a et b (voir schéma). Une telle ellipse est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Une ellipse est à la fois régulière par rapport à x et à y.
Par exemple, $\mathcal{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -a\leq x\leq a\,,\, -b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\leq y\leq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right\}$.

Donc, $Aire(\mathcal{E})=\displaystyle\int\int_{\mathcal{E}} dxdy=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right)dx=2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$



Pour calculer la dernière intégrale, faisons le changement de variable $x=a\cos(\theta)$, on a alors $dx=-a\sin(\theta)d\theta$ et $\theta\in[0,\pi]$.

Ainsi, $Aire(\mathcal{E})=2b\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)(-a\sin(\theta))\,d\theta=2ba\int_{0}^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta.$
En linéarisant $\sin^2(\theta)$, on obtient $\sin^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
Finalement, $Aire(\mathcal{E})=2ba\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=2ba\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta=2ba\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi}=\pi ab$

On obtient ainsi la formule d'aire d'une ellipse $Aire(\mathcal{E})=\pi ab$ qui dans le cas particulier d'un cercle $(a=b)$ donne $Aire(\mathcal{C})=\pi a^2$.

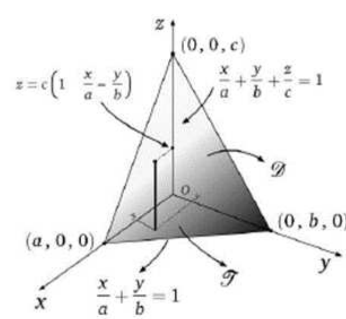
2.3.2 Calculs de volumes

Soit $\mathcal{E}$ un solide, c'est-à-dire une partie bornée de l'espace, délimité par deux surfaces d'équations $z=f_1(x,y)$ et $z=f_2(x,y)$ avec $0\leq f_1(x,y)\leq f_2(x,y)$, pour (x,y) dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan sur lequel les deux fonctions sont définies et continues., alors on a :

$$\mathcal{V}(\mathcal{E})=\int\int_{\mathcal{D}}\left(f_2(x,y)-f_1(x,y)\right)dxdy$$

Volume d'un tétraèdre

Calculons le volume du domaine $\mathcal{E}$ de l'espace compris entre le plan d'équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (a, b et c sont des réels strictement positifs fixés) et les trois plans $x=0$, $y=0$ et $z=0$.
On pose alors $f_1(x,y)=0$ et $f_2(x,y)=c\left(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)$ deux fonctions défines sur le domaine régulier selon l'axe des y : $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,0\leq x\leq a\,,\,0\leq y\leq b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\right\}$. Ainsi,

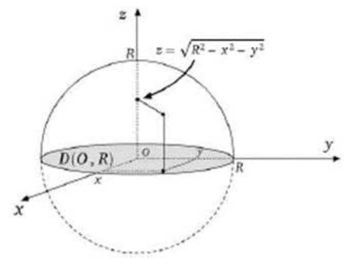


$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{E}) &= c\int\int_{\mathcal{D}}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\,dxdy = c\int_0^a\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} 1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\,dy\right)dx\\
&= c\int_0^a\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)y-\frac{y^2}{2b}\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{cb}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\,dx = \frac{cb}{2}\left[-\frac{a}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a\\
&= \frac{abc}{6}
\end{aligned}$$

D'une manière plus générale, vous pouvez retrouver la formule du volume d'un tétraèdre : $\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \dfrac{B\times H}{3}$ où B est l'aire de la base et H la hauteur.

Volume d'une boule

Nous allons calculer le volume d'une boule de rayon R. Ce volume ne dépend pas du centre de la boule, on peut donc prendre l'origine, donc $\mathcal{B} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$.



Par symétrie, nous pouvons réduire le calcul du volume à deux fois celui d'une demi-boule. Nous allons choisir celle délimitée par les surfaces $z=0$ et $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ pour (x,y) appartenant au disque de centre l'origine et de rayon R, notons le $\mathcal{D}(O,R)$.

$\mathcal{D}(O,R)$ est un domaine régulier par rapport à l'axe des x :

$\mathcal{D}(O,R) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,-R\leq x\leq R\,,\,-\sqrt{R^2-y^2}\leq x\leq\sqrt{R^2-y^2}\}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{B}) &= 2\int\int_{\mathcal{D}(O,R)}\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\,dxdy = 2\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy\\
&= 4\int_{-R}^{R}\left(\int_{\color{red}0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy = 8\int_{\color{red}0}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy
\end{aligned}$$

Ces égalités ont été obtenues grâce à la parité de la fonction en x et en y.

Il nous faut donc à calculer l'intégrale simple : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx$.

Posons $s=\sqrt{R^2-y^2}$ alors $\displaystyle\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx = \int_0^s\sqrt{s^2-x^2}\,dx = s\int_0^s\sqrt{1-\frac{x^2}{s^2}}\,dx$ intégrale que nous avons déjà rencontrée précédement et qui vaut $\dfrac{\pi}{4}s^2$, donc

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = 8\frac{\pi}{4}\int_0^R\left(R^2-y^2\right)\,dy = 2\pi\int_0^R\left(R^2-y^2\right)\,dy = 2\pi\left[R^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$$

Ainsi le volume d'une boule de rayon R est $\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \dfrac{4\pi}{3}R^3$

2.4 Changement de variable dans un intégrale double

Comme dans le cas des intégrales simples, les changements de variables sont un outil très efficace pour le calcul des intégrales doubles.

Pour rappel, lorsque f est une fonction continue d'une variable x sur un intervalle I, le théorème de changement de variables nous dit que, si $t \longmapsto x(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle J dans un intervalle I alors pour tout couple $(a, b) \in J^2$, on a :

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t))x'(t)\,dt$$

c'est ce qu'on appelle la **formule de changement de variables** dans $\mathbb{R}$.

2.4.1 Jacobien d'une transformation ponctuelle

$\mathcal{D}$ et Δ sont deux sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, on considère l'application bijective de Δ sur $\mathcal{D}$: $(u, v) \xrightarrow{\varphi} (x, y)$ définie par les formules : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(u,v) \\ y & = & y(u,v) \end{array}\right.$

On considère qu'à tout point $m(u, v)$ de Δ l'application associe le point $M(x, y)$ de $\mathcal{D}$.

Si les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ admettent des dérivées partielles premières continues sur Δ on appelle **déterminant fonctionnel** ou **jacobien** de φ le déterminant noté $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ défini par : $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

Exemple

Considérons $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u+v \\ y & = & u-v \end{array}\right.$

Alors $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

2.4.2 Formule du changement de variables

Soit changement de variable de Δ sur $\mathcal{D}$ représenté par $f : \Delta \longrightarrow \mathcal{D}$ et défini par $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(u,v) \\ y & = & y(u,v) \end{array}\right.$.

Théorème 5.

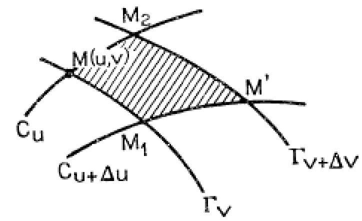
Si $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ lorsque $m(u, v)$ est dans Δ alors :

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

Remarque

Que représente ce déterminant dans l'intégrale ?

Considérons les courbes $\mathcal{C}_u$ (u =constante) et $\mathcal{C}_{u+\Delta u}$ d'une part, Γ_v (v =constante) et $\Gamma_{v+\Delta v}$ d'autre part. On peut les interpréter comme des courbes coordonnées (au moins locales) à partir d'un point M. On peut assimiler l'aire hachurée à l'aire d'un parallélogramme. On a alors pour un petit déplacement, une variation d'aire qui peut s'exprimer au moyen des déplacements suivant les coordonnées locales :



$$\Delta\mathcal{A} \sim |\overrightarrow{MM_1} \wedge \overrightarrow{MM_2}|$$

Or $M = f(u,v)$ $\quad M_1 = f(u+\Delta u, v)$ *et* $M_2 = f(u, v+\Delta v)$.

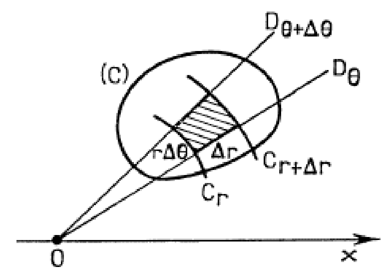
On peut alors écrire $\overrightarrow{MM_1} = f(u+\Delta u, v) - f(u,v) = \dfrac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u}\Delta u$ *et*
$\overrightarrow{MM_2} = f(u, v+\Delta v) - f(u,v) = \dfrac{f(u, v+\Delta v) - f(u,v)}{\Delta v}\Delta v$.

En faisant tendre ce déplacement vers 0 on obtient : $d\mathcal{A} = |f'_u \wedge f'_v| du\, dv$.

C'est à dire en passant en coordonnées (suivant $x(u,v)$ *et* $y(u,v)$*)* $\quad d\mathcal{A} = \left\| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right\| = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\, dv$

2.4.3 Applications

Les coordonnées polaires sont définies par le système : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right.$.



On a $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

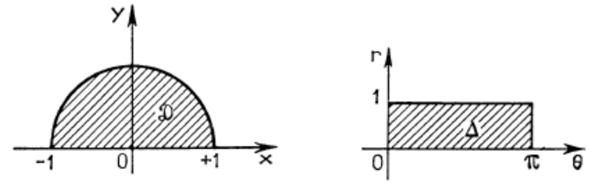
Donc $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr\, d\theta$

Si l'on considère un partage du domaine Δ au moyen des courbes coordonnées r =constante et θ =constante on vérifie que : $\Delta\mathcal{A} = r\Delta\theta \times \Delta r$

Donc $d\mathcal{A} \sim r dr\, d\theta$

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x^2+y^2) dx\, dy$ où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \,|\, x^2+y^2| \leq 1, y \geq 0\right\}$.



En posant $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right.$, on obtient un nouveau domaine $\Delta = \{(r,\theta)\, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Donc $I = \displaystyle\int\int_{\Delta} r^2 \times r dr\, d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\pi}{4}$

2.5 Centre d'inertie

En physique, lorsqu'on a une **distribution discrète** (c'est à dire sous forme de points) de matière, de charges... on peut lui associer diverses grandeurs physiques : centre d'inertie, moments d'inertie,...
On peut également définir ces grandeurs pour une **distribution continue** occupant un domaine du plan ou de l'espace (pas dans ce cours) : il suffit de décomposer la distribution en éléments ponctuels et de déterminer leur contribution à l'ensemble et cela se fait via le calcul intégral.

Pour une distribution discrète de n points matériels $A_1, ..., A_2$ de masses respectives $m_1, ..., m_n$, on appelle centre d'inertie de cette distribution l'unique point G v'erifiant l'égalité vectorielle : pour tout point A,

$$AG = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \sum_{j=1}^{n} m_j AA_j$$

Si à présent, on a une distribution continue de masse répartie dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan avec une densité de masse $\rho(P) = \rho(x, y)$ en tout point $P = (x, y) \in \mathcal{D}$, alors on définint son centre d'inertie comme étant l'unique point G donné, pour tout $A \in \mathbb{R}^2$, par

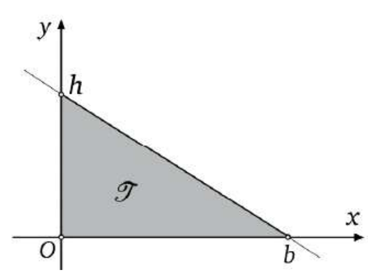
$$AG = \frac{1}{\int\int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx\, dy} \int\int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) AP dx\, dy$$

En particulier, si on prend $A = O$ origine du repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ et qu'on projette la relation vectorielle précédente sur les deux axes de notre repère, nous obtenons les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie : $x_G = \frac{1}{M}\int\int_{\mathcal{D}} x\rho(x, y) dx\, dy \quad y_G = \frac{1}{M}\int\int_{\mathcal{D}} y\rho(x, y) dx\, dy$ où $M = \int\int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx\, dy$ est la masse totale de la distribution.

Exemple

Déterminons le centre d'inertie G d'une plaque mince homogène (c'est à dire que $\rho(x, y) = 1$) qui a la forme triangulaire $\mathcal{T}$ ci-dessous.
On a $M = \int\int_{\mathcal{T}} dx\, dy = Aire\,(\mathcal{T}) = \frac{bh}{2}$. Sachant que la droite qui relie les deux points $(b, 0)$ et $(0, h)$ est d'équation $y = \frac{h}{b}(b - x)$ ou $x = \frac{b}{h}(h - y)$ et que le domaine $\mathcal{T}$ est régulier par rapport à y, on aura :

$$x_G = \frac{1}{M}\int\int_{\mathcal{T}} x dx\, dy \quad = \frac{2}{bh}\int_0^h \left(\int_{\frac{b}{h}(h-y)} x dx\right) dy = \frac{2}{bh}\int_0^h \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{b}{h}(h-y)} dy = \frac{1}{bh}\int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2 dy$$
$$= \frac{b}{h^3}\left[-\frac{(h-y)^3}{3}\right]_0^h = \frac{b}{3}$$



De la même mainère, on trouve $y_G = \frac{h}{3}$ (Exercice)