CHAPITRE

6

# Dénombrements et probabilités

## Sommaire

**Objectifs du chapitre :**

- Rappeler le vocabulaire des probabilités
- Rappeler les propriétés et calculs fondamentaux des probabilités
- Utiliser le dénombrement pour calculer des probabilités
- Rappeler les prorpiétés et calculs de probabilités conditionnelles
- Savoir utiliser les formules de probabilités composées et totales
- Rappeler la définition et l'utilisation d'événement indépendants.
- Introduction de varaibles aléatoires, loi de probabilité, espérance, variance et écart type avec leurs calculs.

# 1 Rappels : Vocabulaire des évènements

## 1.1 Vocabulaire

**Définition 1.**

Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue** liée à l'expérience aléatoire.

**Exemple**

- Lancer un dé à six faces : « obtenir 2 » est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- Tirage des six numéros gagnants du Loto : « obtenir la combinaison $2-5-17-23-36-41$ » est une éventualité.

**Définition 2.**

L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, il est très souvent noté $\Omega$.

**Exemple**

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{pile}\,;\text{face}\}$.
- Lancer un dé à six faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

**Définition 3.**

- Un **événement** d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.
- Un événement ne comprenant qu'une seule issue est un **événement élémentaire**.

**Exemple**

Lors du lancer d'un dé à 6 faces :

- $A$ = « obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{5\}$,
- $B$ = « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $B = \{2; 4; 6\}$.

**Définition 4.**

- L'événement qui ne contient aucune issue est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$
- L'événement composé de toutes les éventualités est appelé **événement certain**.

**Exemple**

- Tirage des six numéros gagnants du loto : « obtenir la combinaison $3-25-38-59-67-91$ » est un événement impossible (les numéros vont de 1 à 49).
- Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un nombre positif » est un événement certain.

**Définition 5.**

Pour tout événement $A$ il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé **événement contraire** de $A$, qui est composé des éléments de $\Omega$ qui ne sont pas dans A.
On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$.

**Exemple**

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{\text{pile}\}$ alors son événement contraire est $\overline{A} = \{\text{face}\}$.
- Lancer d'un dé à six faces : si $A$ est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 », alors son événement contraire $\overline{A}$ est l'événement « obtenir 5 ou 6 ».

Dans toute la suite du cours, on suppose que $\Omega$ est l'univers associé à une expérience aléatoire, et $A$ et $B$ deux événements associés à cet univers.

## 1.2 Intersection et réunion d'événements

**Définition 6.**

- **Intersection d'événements** : événement constitué des éventualités appartenant à $A$ et à $B$ noté $A \cap B$ (se lit « $A$ inter $B$ » ou « $A$ et $B$ »),
- **Réunion d'événements** : événement constitué des éventualités appartenant à $A$ ou à $B$ noté $A \cup B$ (se lit « $A$ union $B$ » ou « $A$ ou $B$ »).

**Remarque**

*Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont **disjoints** ou **incompatibles**.*

**Exemple**

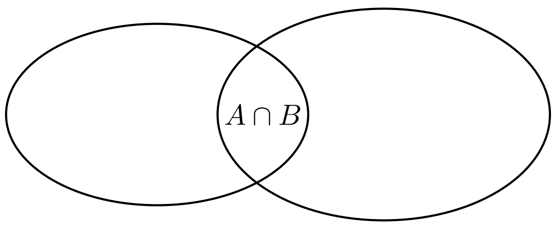
On considère l'ensemble des chiffres.

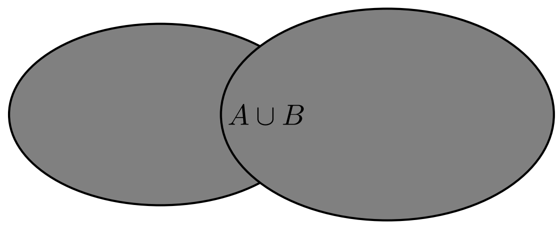
On note les événements $A$ : « obtenir un chiffre pair » et $B$ : « obtenir un chiffre strictement inférieur à six »

- $A \cap B =$ « obtenir un chiffre pair et inférieur strictement à six » : $A \cap B = \{2; 4\}$,
- $A \cup B =$ « obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six » : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$.

## 1.3 Représentation des événements

**Diagrammes ou patates**



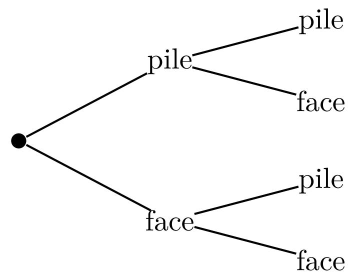

**Tableaux**

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule la produit obtenu :

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 12 |
| **4** | 4 | 8 | 12 | 16 |

**Arbres**

On lance une pièce de monnaie deux fois, on peut schématiser cette expérience par un arbre :



## 2 Rappels : Calcul de probabilités

**Définition 7.**

La **probabilité** d'un événement d'univers $\Omega$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

**Définition 8.**

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

**Remarque**

*Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :*

— *on lance un dé **non pipé**,*

— *dans une urne, il y a des boules **indiscernables** au toucher,*

— *on rencontre au **hasard** une personne parmi ...*

**Exemple**

On lance un dé équilibré à six faces.

On considère les événements $A$ : « obtenir un chiffre pair » et $B$ : « obtenir un diviseur de six ».

- Le dé est équilibré, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
- $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6\}$,
- donc, $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$,
- et $P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

**Propriété 1.**

Soit $A$ et $B$ deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Exemple**

On considère l'ensemble $E$ des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

$A$ est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » :

- $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,

$B$ est l'événement : « le nombre est multiple de 2 » :

- $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$,

Calcul des probabilités :

- $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3.$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0,7.$
- $P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5.$
- $P(A \cap B) = \frac{3}{20} = 0,15.$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65.$

# 3 Dénombrements

Le problème du calcul de probabilités se réduit souvent à un problème de dénombrement (nombre des issues possibles, nombre de cas favorables ...). Voici différentes méthodes de dénombrement :

## 3.1 Utilisation de tableaux

**Exemple**

Voici les résultats d'un sondage effectué au début de l'année 1998 auprès de 1 000 personnes, à propos d'Internet :

— 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;

— 35% des personnes interrogées ont moins de 25 ans et, parmi celles-ci, 80% déclarent être intéressées par Internet ;

— 30% des personnes interrogées ont plus de 50 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

| | Intéressées par Internet | Non intéressées par Internet | Total |
|---|---|---|---|
| Moins de 25 ans | | 70 | |
| De 25 à 50 ans | | | |
| Plus de 50 ans | | | |
| Total | | | |

2. On choisit au hasard une personne parmi les 1000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

   $A$ : « la personne interrogée est intéressée par Internet » ;

   $B$ : « la personne interrogée a moins de 25 ans ».

   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

   (b) Définir par une phrase l'événement contraire de $B$, puis calculer sa probabilité.

   (c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.

   (d) On sait maintenant que la personne interrogée n'est pas intéressée par Internet. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

**Solution**

1.

| | Intéressées par Internet | Non intéressées par Internet | Total |
|---|---|---|---|
| Moins de 25 ans | 280 | 70 | 350 |
| De 25 à 50 ans | 75 | 275 | 350 |
| Plus de 50 ans | 45 | 255 | 300 |
| Total | 400 | 600 | 1000 |

2. (a) $P(A) = \dfrac{400}{1000} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(B) = \dfrac{350}{1000} = \dfrac{7}{20} = 0,35$.

   (b) $\overline{B}$ : « La personne choisie a 25 ans ou plus » et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{7}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$

   (c) $A \cap B =$ « la personne interrogée est intéressée par Internet ET a moins de 25 ans ».
   $P(A \cap B) = \dfrac{250}{1000} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{400}{1000} + \dfrac{350}{1000} - \dfrac{250}{1000} = \dfrac{500}{1000} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

   (d) $P = \dfrac{70 + 275}{600} = \dfrac{345}{600} = \dfrac{23}{40} = 0,575$.

## 3.2 Utilisation d'arbres

**Exemple**

Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme quatre bâtons de crème glacée, de quatre parfums différents (vanille, chocolat, pistache, fraise).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur.

Tous les choix sont équiprobables.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.

2. Ses parfums préférés sont vanille et fraise. Calculer les probabilités qu'il obtienne :

   (a) le bâton à la vanille, puis le bâton au chocolat ;

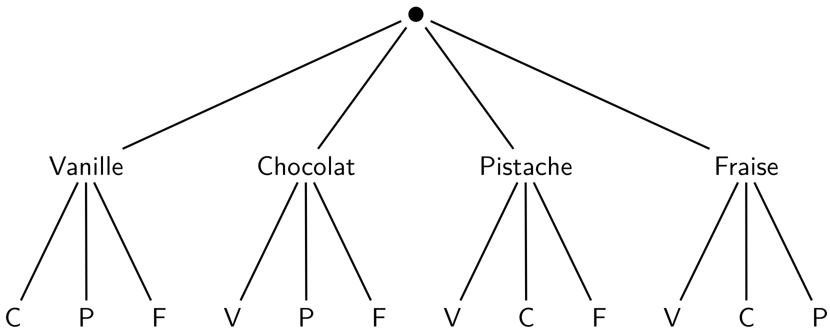
   (b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;

   (c) un seul de ses parfums préférés ;

   (d) aucun de ses parfums préférés.

**Solution**

1. d'après l'arbre, on obtient $4 \times 3 = 12$ possibilités.




2. Toutes les situations étant équiprobables, donc, on a :

(a) $P = \frac{1}{12}$.　(b) $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.　(c) $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.　(d) $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

## 3.3 Permutations

**Définition 9.**

On réalise une **permutation** si on écrit tous les éléments d'un ensemble dans un ordre déterminé.

**Exemple**

On considère 4 pions de couleurs, respectivement verte $(V)$, rouge $(R)$, bleue $(B)$ et noire $(N)$. On souhaite aligner les pions les uns derrière les autres. De combien de manières différentes (par l'ordre des couleurs) peut-on le faire ?

- Pour la première position, il y a 4 couleurs possibles. Pour la seconde, il n'y en a plus que 3. Pour la troisième position, il ne reste plus que deux possibilités de couleurs, et pour la dernière position, il ne restera qu'une couleur, la dernière. Un arbre permet de décrire complètement ce schéma.
- Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités d'ordonner les 4 pions de couleurs différentes.

**Définition 10.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** $n$ le nombre noé $n!$ qui vaut $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

**Exemple**

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $6! = 1 \times 2 \times \cdots \times 5 \times 6 = 720$.
- $8! = 1 \times 2 \times \cdots \times 7 \times 8 = 40320$.

**Remarque**

— *5! se lit « factorielle 5 », et non pas « 5 factorielle » !*

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$*

**Exemple**

On peut simplifier les expressions contenant des factorielles :

- $\dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730.$
- $\dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21.$
- $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n.$

**Exemple**

Inversement, on peut réduire un calcul grâce aux factorielles :

- $1 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 5!.$
- $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \dfrac{8}{3}.$
- $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{9!}{2^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = \dfrac{9!}{2^4 \times 4!}.$
- $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times (2n) = 2^n \times 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times (n) = 2^n \times n!.$

**Propriété 2.**

Le nombre de permutations de $n$ éléments est $n!$.

**Remarque**

*On dit aussi qu'il y a $n!$ façons de ranger $n$ objets dans $n$ cases, de manière à placer tous les objets dans une et une seule case.*

**Exemple**

Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. On peut déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer :

- de manière exacte ;
- en en donnant un ordre de grandeur :

- $16! = 20922789888000$ ;
- soit environ 21000 milliards ...

## 3.4 Combinaisons

**Définition 11.**

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels.

- on appelle **combinaison** de $p$ éléments parmi $n$ le fait de prélever $p$ éléments parmi $n$, de manière à constituer un groupe dans lequel l'ordre n'a pas d'importance.
- Ce nombre de combinaison vaut : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

**Remarque**

— *Si l'on s'intéresse à la constitution d'un groupe ordonné, on parle d'**arrangement**, au lieu de combinaison.*

— *On trouve aussi la notation aussi $C_n^k$ au lieu de $\binom{n}{k}$.*

**Exemple**

Calcul des combinaisons $\begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}$ pour $k$ variant de 0 à 5 :

- $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{0!(5-0)!} = \dfrac{5!}{0!5!} = 1.$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{1!(5-1)!} = \dfrac{5!}{1!4!} = 5.$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10.$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = \dfrac{5!}{4!1!} = 5.$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{5!(5-5)!} = \dfrac{5!}{5!0!} = 1.$

**Exemple**

On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée des cartes).

- Il y a $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} = 201376$ mains possibles.
- Il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \times 378 = 1512$ mains contenant 3 rois exactement.

**Propriété 3.**

Soient $n$ et $p$ des entiers naturels tels que $p \leq n$, on a les propriétés suivantes :

- ♦ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- ♦ Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- ♦ Relation de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

**Triangle de pascal :**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \text{donne :} \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \boxed{1} & + & \boxed{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

**Propriété 4** (Formule du binôme de Newton)**.**

Pour tous réels $a$ et $b$ et tout entier naturel $n$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

.

**Exemple**

Développons $(x+2)^4$ :

- $(x+2)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} x^k \, 2^{4-k}$.
- Pour $n = 4$, le triangle de pascal nous donne les coefficients : 1 - 4 - 6 - 4 - 1.
- Donc : $(x+2)^4 = 1 \times 2^4 \times x^0 + 4 \times 2^3 \times x^1 + 6 \times 2^2 \times x^2 + 4 \times 2^1 \times x^3 + 1 \times 2^0 \times x^4$
  $= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

# 4 Probabilités conditionnelles

## 4.1 Définition

**Définition 12.**

On suppose que $P(B) \neq 0$.

- On appelle **probabilité conditionnelle de** $A$ **relativement à** $B$ ou **de** $A$ **sachant** $B$ la probabilité que l'événement $A$ se réalise sachant que $B$ est réalisé.
- Cette probabilité vaut $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

**Remarque**

*On trouve aussi la notation* $P(A|B)$ *pour* $P_B(A)$.

**Exemple**

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dè à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

— $B$ : « la face obtenue porte un numéro pair » ;

— $A$ : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

- L'événement $(A|B)$ correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de 3 » parmi les éventualités de $B$, autrement dit parmi $\{2; 4; 6\}$. Il n'y a donc que l'issue « obtenir 6 » qui correspond.
  Et comme on est en situation d'équiprobabilité, on obtient $P_B(A) = \dfrac{1}{3}$.
- Par le calcul, on a $P(B) = \dfrac{3}{6}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ donc, d'après la formule : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

## 4.2 Propriétés

**Propriété 5.**

Pour tous événements $A$ et $B$ de probabilité non nulle, on a :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B).$$

**Démonstration.**

Pour $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on peut écrire :

- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

**Propriété 6.**

Soit $S$ unévénement de probabilité non nulle, on a :

- $0 \leq P_S(A) \leq 1$ ;
- $P_S(\Omega) = 1$ ;
- $P_S(\varnothing) = 0$ ;
- $P_S(\bar{A}) = 1 - P_S(A)$ ;
- $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B) - P_S(A \cap B)$ ;
- Si $A$ et $B$ sont des événements incompatibles, alors $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B)$ ;
- $P_S(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_S(\overline{A \cup B}) = 1 - P_S(A \cup B)$.

**Remarque**

*L'ensemble de ces propriétés revient à dire qu'une probabilité conditionnelle relative à un événement $S$ a toutes les propriétés habituelles du calcul des probabilités.*

**Théorème 1** (Formule des probabilités composées)**.**

Soient $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) ... P_{A_1 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**Remarque**

*On écrit aussi* $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{A_1 \cap ... \cap A_{i-1}}(A_i)$

**Démonstration.**

Il suffit de remarquer qu'en appliquant la formule des probabilités conditionnelles aux événements $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}$ et $A_n$ on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n) \times P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

On réitère alors la démarche jusqu'à obtenir la formule.

**Exemple**

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ? On note $B_i$ l'événement « La i-ème boule tirée est blanche ». La probabilité recherchée est :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B3)$$

Clairement, $P(B_1) = \frac{3}{10}$.

Maintenant, si $B_1$ est réalisé, avant le $2^{ème}$ tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. On a donc : $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{10}$.

Si $B_1$ et $B_2$ sont réalisés, avant le $3^{ème}$ tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit $P_{B_1 \cap B_2)}(B_3) = \dfrac{1}{10}$.

Finalement : $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{6}{1000} = \dfrac{3}{500}$.

## 4.3 Probabilités totales

### 4.3.1 Partition de l'univers

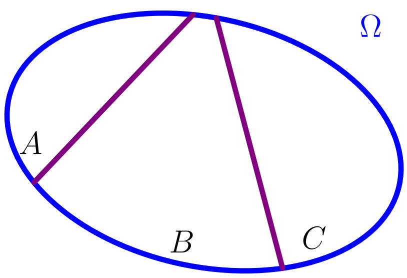
**Définition 13.**

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ pour $n \geqslant 1$ des parties non vides d'un ensemble E. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\Omega$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$ ;
- pour tout $i \in 1; 2; ...; n$ et tout $j \in 1; 2; ...; n$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$

**Exemple**

Les événements $A$, $B$ et $C$ forment une **partition** de $\Omega$.




**Remarque**

*Un événement $A$ et son contraire $\overline{A}$ forment toujours une partition de $\Omega$.*

### 4.3.2 Formules des probabilités totales

**Théorème 2** (Formule des probabilités totales)**.**

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de $\Omega$ tous de probabilité non nulle et $B$ un événement alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

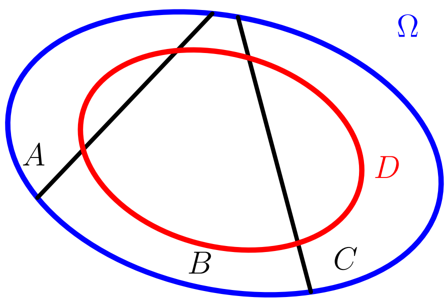
**Exemple**

En reprenant l'exemple précédent.

Ainsi $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$ et les événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles.

On en déduit la formule des probabilités totales :

$$p\,(D) = P\,(A \cap D) + P\,(B \cap D) + p\,(C \cap D)$$




Qui peut encore s'écrire :

$$P\,(D) = P\,(A) \times P_A\,(D) + P\,(B) \times P_B\,(D) + P\,(C) \times P_C\,(D)$$

**Corollaire 1.**

Pour tous $A$ et $B$ de probabilité non nulle :

$$P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}).$$

**Démonstration.**

Les événements $B$ et $\overline{B}$ forment une partition de $\Omega$. En appliquant le théorème précédent on obtient : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$.

## 4.4 Exemple de calcul de probabilités conditionnelles par différentes méthodes

**Exemple**

Dans un atelier, deux machines $M_1$ et $M_2$ découpent des pièces métalliques identiques. $M_1$ fournit 60% de la production (parmi lesquelles $6,3\%$ sont défectueuses), le reste étant fourni par $M_2$ (dont 4% de la production est défectueuse). La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. Utilisation des formules des probabilités conditionnelles.
   (a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_1$ ?
   (b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_2$ ?
   (c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
2. Utilisation d'un tableau

   On suppose maintenant que la production est composée de 10000 pièces.
   (a) Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :

| | Nombre de pièces produites par $M_1$ | Nombre de pièces produites par $M_2$ | Total |
|---|---|---|---|
| Nombre de pièces défectueuses | | | |
| Nombre de pièces conformes | | | |
| Total | | | |

   (b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_1$ ?
   (c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_2$ ?
   (d) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
3. Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles
   (a) Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.
   (b) Quelle est la probabilités de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_1$ ?
   (c) Quelle est la probabilités de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par $M_2$ ?
   (d) Quelle est la probabilités de prélever une pièce défectueuse ?

**Solution**

Soit $D$ l'événement « La pièce prélevée est défectueuse »

1. (a) $P_{M_1}(D) = 0,063$.
   (b) $P_{M_2}(D) = 0,040$.
   (c) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$

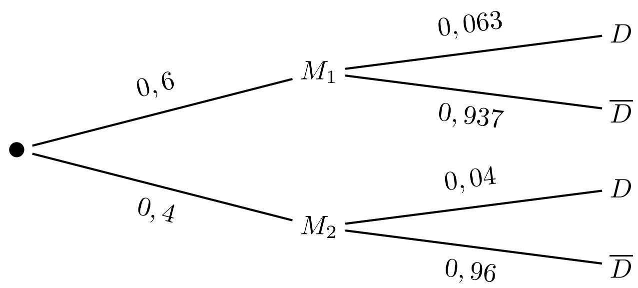
$$= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D)$$
$$= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,040$$
$$= 0,0538.$$

2. (a)

| | Nombre de pièces produites par $M_1$ | Nombre de pièces produites par $M_2$ | Total |
|---|---|---|---|
| Nombre de pièces défectueuses | 378 | 160 | 538 |
| Nombre de pièce conformes | 5622 | 3840 | 9462 |
| Total | 6000 | 4000 | 10000 |

(b) $P_{M_1}(D) = \dfrac{378}{6000} = 0,063.$ (c) $P_{M_2}(D) = \dfrac{1600}{4000} = 0,040.$ (d) $P(D) = \dfrac{538}{10000} = 0,0538.$

3. (a) arbre de probabilités pondéré :




(b) $P_{M_1}(D) = 0,063$ d'après l'arbre de probabilités.

(c) $P_{M_2}(D) = 0,040$ d'après l'arbre de probabilités.

(d) $$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) \\ &= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) \\ &= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,040 \\ &= 0,0538. \end{aligned}$$

## 4.5 Événements indépendants

**Définition 14.**

On dit que $A$ et $B$ sont des événements **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

**Exemple**

On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

$A$ = « Tirer un as », $B$ = « Tirer un coeur » et $C$ = « Tirer un as rouge ».

Indépendance de $A$ et $B$ :

- $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}.$
- $P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}.$
- $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32} = P(A) \times P(B)$, les événements $A$ et $B$ sont donc indépendants.

Indépendance de $B$ et $C$ :

- $P(B) = \dfrac{1}{4}.$
- $P(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}.$
- $P(B \cap C) = \dfrac{1}{32} \neq P(B) \times P(C)$, les événements $B$ et $C$ ne sont donc pas indépendants.

**Remarque**

*Dans le cas où $A$ et $B$ sont des événements de probabilités non nulles, on a*

— $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B) = P(A).P(B)$, *d'où :*

— $P_B(A) = P(A)$ *et* $P_A(B) = P(B)$.

**Propriété 7.**

Si $A$ et $B$ sont des événements indépendants, alors : $A$ et $\overline{B}$ ; $\overline{A}$ et $B$ ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également des événements indépendants.

# 5 Variable aléatoire

## 5.1 Notion de variable aléatoire

**Définition 15.**

Une grandeur numérique $X$ prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire**.

**Exemple**

Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

On appelle $X$ le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec $X$ une variable aléatoire réelle telle que :
  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

## 5.2 Loi d'une variable aléatoire

**Définition 16.**

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire $X$ est la fonction $f$ qui a chaque valeur associe sa probabilité.

**Remarque**

*En général, on présente la loi d'une variable aléatoire $X$ sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par $X$ ainsi que les probabilités associées :*

| *Valeurs de $X$ : $x_i$* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Probabilité : $P(X = x_i)$* | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

**Exemple**

On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de $X$ est donnée par :

| $x_i$ | $-10$ | $-6$ | $-2$ | $4$ | $8$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**Exemple**

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur $X$ calculée suivant la régle suivante :

- si la carte est un Roi, $X$ vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, $X$ vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, $X$ vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

La loi de $X$ est donnée par :

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Remarque**

*On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait* $1$ *!*

## 5.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

**Définition 17.**

La **fonction de répartition** de la variable aléatoire $X$ est la fonction :

$$\begin{array}{rrcl} F: & \mathbb{R} & \to & [\,0\,;\,1\,] \\ & x & \mapsto & F(x) = P(X \leq x). \end{array}$$

**Exemple**

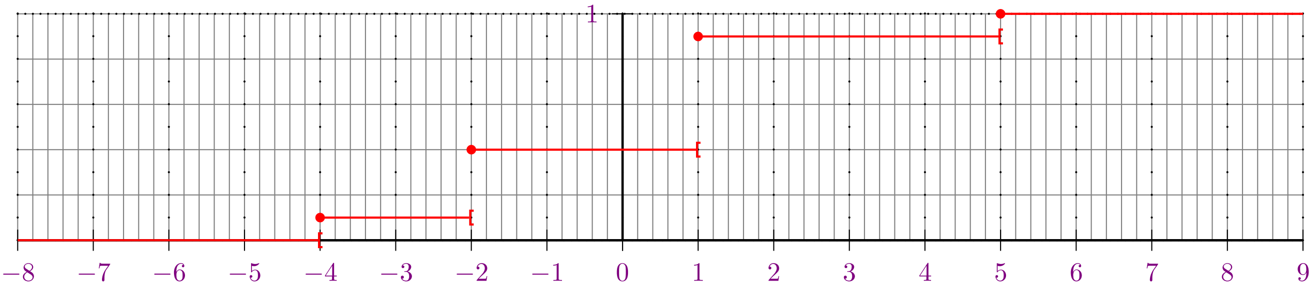
Soit $X$ la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

| $x_i$ | $-4$ | $-2$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $0,1$ | $0,3$ | $0,5$ | $0,1$ |

- La fonction de répartition $F$ de $X$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in ]-\infty; -4[ \\ 0,1 & \text{si } t \in [-4; -2[ \\ 0,4 & \text{si } t \in [-2; 1[ \\ 0,9 & \text{si } t \in [1; 5[ \\ 1 & \text{si } t \in [5; +\infty[. \end{cases}$$

➔ La fonction de répartition $F$ de $X$ admet la représentation graphique ci-dessous :




Le théorème suivant permet de tracer en pratique la fonction de répartition d'une variable aléatoire (discrète et finie) :

**Propriété 8.**

La fonction de répartition $F$ de $X$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

- $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(t) = 1$,
- $F$ est constante par morceaux,
- la courbe représentative de $F$ présente des « sauts » (est discontinue) aux points dont les abscisses sont des valeurs $x_i$ de $X$, la hauteur des sauts étant la probabilité $p_i$.

## 5.4 Espérance d'une variable aléatoire

**Définition 18.**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

On appelle **espérance** de la variable aléatoire $X$ le réel noté $E(X)$ qui vaut :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

**Remarque**

*Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la variable aléatoire $X$.*

**Exemple**

On reprend le jeu de cartes étudié précédemment.

On rappelle que la loi de $X$ est donnée par :

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

D'où le calcul de l'espérance :

- $E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8}$
- $E(X) = \frac{8}{8} = 1.$
- Concrètement, cela signifie « qu'en moyenne », le joueur gagne 1 point.

## 5.5 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

**Définition 19.**

Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de loi :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

- On appelle **variance** de la variable aléatoire $X$ le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + ... + p_n[x_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2.$$

- On appelle **écart-type** de $X$ le réel noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Exemple**

Calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8}[0-1]^2 + \frac{1}{8}[1-1]^2 + \frac{1}{8}[3-1]^2 + \frac{1}{8}[4-1]^2$
- $V(X) = \frac{5}{8} + 0 + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2,25.$

D'où l'écart-type :

- $\sigma_x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sigma_x = \frac{3}{2} = 1,5.$

Le théorème suivant permet un calcul plus facile de la variance :

**Théorème 3** (De Kœnig).

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_i x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2.$$

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n p_i[x_i - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i \left(x_i^2 - 2x_iE(X) + (E(X))^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^n p_i \left(E(X)\right)^2 \\ &= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 \text{ car } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i x_i = E(X) \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

**Exemple**

Autre méthode de calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - 1^2$
- $V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} - 1 = V(X) = \frac{9}{4} = 2,25.$

**Propriété 9.**

- La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle $X$ sont des nombres positifs.
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- Si $X$ est exprimé dans un certaine unité, $\sigma_X$ l'est dans la même unité.