CHAPITRE

2 CALCUL VECTORIEL

Sommaire

I Calcul vectoriel dans le plan **3**

1 Rappel : Généralités sur les vecteurs **3**

1.1 Projeté orthogonal . . . 6

2 Repère du plan **7**

2.1 Repère affine . . . 7

2.1.1 Coordonnées ponctuelles . . . 7

2.1.2 Coordonnées de vecteurs . . . 8

2.2 Repère cartésien . . . 9

2.3 Repère polaire . . . 12

3 Vecteurs du plan **13**

3.1 Opération sur les vecteurs et coordonnées . . . 13

3.2 Propriétés des vecteurs . . . 14

3.2.1 Norme d'un vecteur . . . 14

3.2.2 Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux . . . 15

3.2.3 Équation paramétrique de droites dans le plan . . . 17

II Calcul vectoriel dans l'espace **19**

4 Vecteurs coplanaires **19**

5 Projeté orthogonal sur un plan **20**

6 Repères de l'espace **21**

6.1 Repère affine . . . 21

6.2 Repère cartésien . . . 22

6.3 Repère cylindrique . . . 25

6.4 Repère sphérique . . . 26

7 Vecteurs de l'espace **27**

7.1 Norme d'un vecteur . . . 27

7.2 Opération et coordonnées . . . 28

7.3 Équation paramétrique de plan . . . 29

8 Droites et plans de l'espace **30**

8.1 Droites de l'espace . . . 30

8.2 Plans de l'espace . . . 30

9 Parallélisme dans l'espace **31**

9.1 Parallélisme d'une droite et d'un plan . . . 31

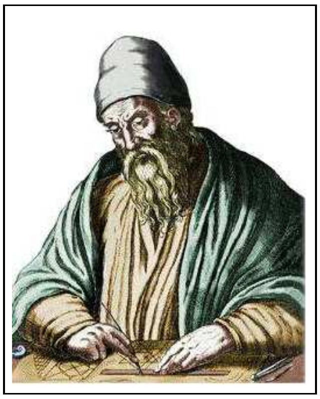
9.2 Parallélisme de deux plans . . . 32

9.3 Parallélisme de deux droites . . . 32

10 Orthogonalité dans l'espace **34**

Première partie

Calcul vectoriel dans le plan



On sait peu de choses au sujet d'Euclide. Il parti en Égypte afin d'y enseigner les mathématiques et travailla au monseion a d'Alexandrie. Il mena de nombreux travaux de recherche. Il est l'auteur des « Éléments ». Ce texte, formé de treize livres, est une compilation du savoir mathématique de son époque. Il resta une référence pendant près de 2000 ans et contient, entre autre, les fondements de la géométrie du plan. C'est dans les Éléments que pour la première fois un travail mathématique a été réalisé sur la base d'une démarche axiomatique.

Objectif du chapitre :

- Lire les coordonnées d'un point, d'un vecteur. Placer un point dans un repère, connaissant ses coordonnées. Calculer le milieu d'un segment, les coordonnées d'un vecteur.
- Savoir passer du système de coordonnées cartésiennes aux autres et vice versa.
- Aborder la notion d'orthogonalité.
- Déterminer si deux droites sont parallèles, orthogonales, perpendiculaires.
- Déterminer si des vecteurs forment une base d'un plan, de l'espace.
- Déterminer l'équation paramétrique d'une droite, d'un plan passant par un point donné.
- Connaître et utiliser les propriétés de parallélisme et d'orthogonaité de droites et de plans.
- Résoudre des problèmes de géométrie.

1 Rappel : Généralités sur les vecteurs

Définition 1.

Soit A et B deux points, on appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ la donnée de ces trois paramètres :

- ➤ Une direction : la droite (AB)
- ➤ Un sens : de A vers B
- ➤ Une longueur : AB (on parle aussi de norme et on note $||\overrightarrow{AB}||$)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche.

Définition 2 (Égalité de deux vecteurs).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs égaux si et seulement si :

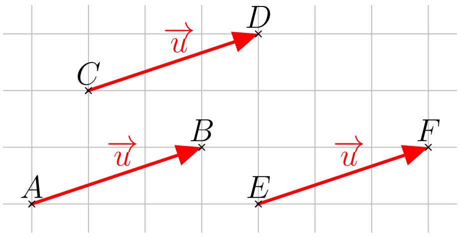
- ➤ $AB = CD$ (les vecteurs ont la même normes)
- ➤ (AB) et (CD) sont parallèles (les vecteurs ont la même direction)
- ➤ On se déplace de A vers B comme de C vers D (les vecteurs ont le même sens)

Remarque

Il existe une infinité de vecteurs égaux à un vecteur donné.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut appeler par une seule lettre, le plus souvent $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{AB}$ est le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{u}$. Son extrémité est B.



Propriété 1.

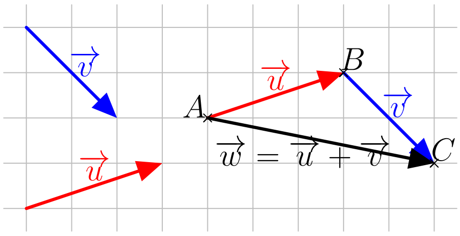
Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Définition 3 (Somme de deux vecteurs).

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :

Soit A un point , on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B, puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Propriété 2 (Relation de Chasles).

Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 3.

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :

- ♦ Commutativité $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- ♦ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
- ♦ Associativité $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

Lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on note $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, ces vecteurs sont de sens opposés.

Définition 4.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

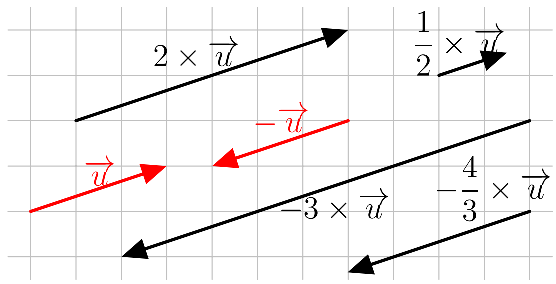
On appelle $\overrightarrow{v}$ **le vecteur opposé** de $\overrightarrow{u}$. On a $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$.

Définition 5 (Produit d'un vecteur et d'un scalaire)**.**

Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On définit le vecteur $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :

- A, B et C sont alignés,
- si $\lambda > 0$, $AC = \lambda AB$ et B et C sont du même côté par rapport à A,
- Si $\lambda < 0$, $AC = \lambda AB$ et B et C sont de part et d'autre de A.

Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$



Définition 6.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$

Remarque

Le vecteur nul est le seul vecteur à être colinéaire à tous les autres vecteurs.

Propriété 4.

Trois points A, B et C deux à deux distincts sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction, c'est à dire, si et seulement si, (AB) ET (AC) sont parallèles.

Or, A appartient à ces deux droites. Elles sont donc confondues, ce qui équivaut à dire que les points A, B, et C sont alignés.

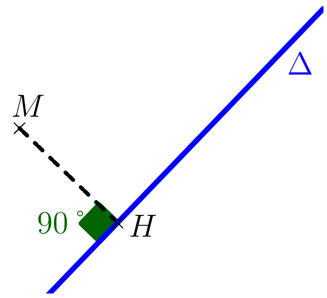
Définition 7.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont perpendiculaires.

1.1 Projeté orthogonal

Définition 8.

Soit M un point et (Δ) une droite. Le projeté orthogonal H du point M sur la droite (Δ) est le point appartenant à (Δ) tel que (MH) est perpendiculaire à (Δ).

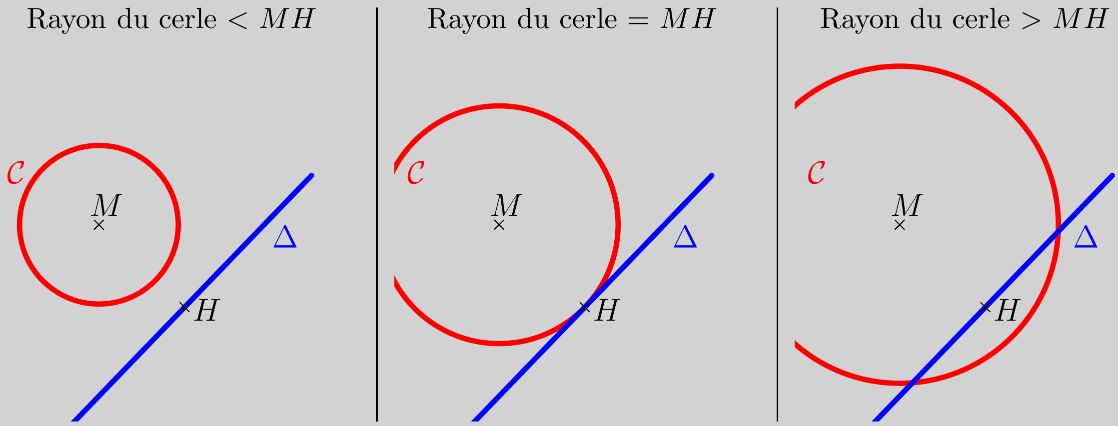


Proposition 1.

Le projeté orthogonal du point M sur la droite (Δ) est le point de (Δ) le plus proche de M

Démonstration.

Traçons des cercles de centre M et de différents rayons :



Le point le point de la droite le plus proche du point M est donc de point H.

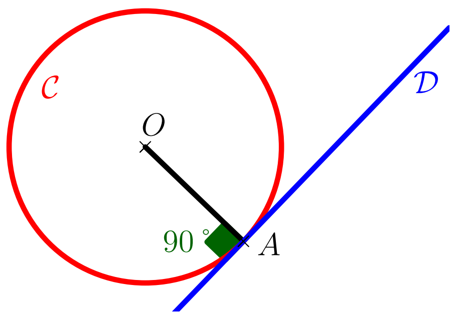
Lorsque le rayon du cercle est égal à MH, on remarque que le cercle est tangent à la droite (Δ). Donc la droite (MH) est perpendiculaire à la droite (Δ).

D'après la définition précédente, on en déduit que le point H est le projeté orthogonal de M sur (Δ).

Donc le projeté orthogonal du point M sur la droite (Δ) est le point de la droite (Δ) le plus proche de M

Définition 9.

Une tangente à un cercle est une droite ayant un seul point commun avec le cercle.



Propriété 5.

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par un point A d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Si $(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ alors $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire au rayon $[OA]$.

2 Repère du plan

2.1 Repère affine

Il existe beaucoup de manières de se repérer dans un plan. Cependant, en mathématiques, et plus particulièrement dans ce chapitre, nous utiliserons le plus souvent un **repère orthonormé**.

Définition 10.

On appelle **repère affine** du plan, un triangle OIJ non aplati dans lequel :

- O est appelé **origine** du repère,
- la droite graduée (OI) est appelée **axe des abscisses**,
- la droite graduée (OJ) appelée **axe des ordonnées**.

On note ce repère $(O; I; J)$.

Définition 11.

Lorsque le triangle OIJ est rectangle en O, on parle de **repère orthogonal**.

Lorsque $OI = OJ = 1$ on parle de **repère orthonormé**.

2.1.1 Coordonnées ponctuelles

Propriété 6.

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$.

Chaque point M du plan est repéré par un couple unique de nombres $M(x; y)$ appelé coordonnées du point. x est l'**abscisse** du point et y est l'**ordonnée** du point.

Méthode.

Les coordonnées d'un point se déterminent par projection du point sur chacun des axes qui constituent le repère parallélement à l'autre. Généralement cela se fera par lecture.

Propriété 7.

Dans un repère quelconque $(O; I; J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$.
Si le point $I(x_I; y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$ alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple

Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 3)$.

Montrons que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Soit $I(x_I; y_I)$ est le milieu du segment $[AC]$.
On a donc : $x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2}$
$x_I = \dfrac{-3 + 4}{2}$ et $y_I = \dfrac{-2 + 4}{2}$
$x_I = 0.5$ et $y_I = 1$
$I = (0.5; 1)$

Soit $K(x_K; y_K)$ est le milieu du segment $[BD]$.
On a donc : $x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2}$
$x_K = \dfrac{1 + 0}{2}$ et $y_K = \dfrac{-1 + 3}{2}$
$x_K = 0.5$ et $y_K = 1$
$K = (0.5; 1)$

Le point I et le point K sont confondus donc $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Le quadrilatère $ABCD$ possède des diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

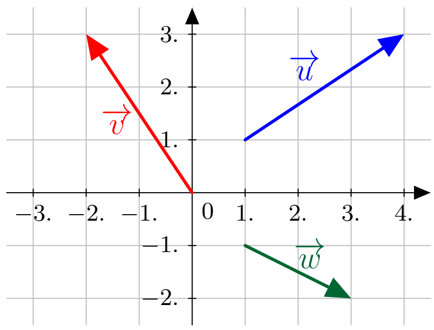
2.1.2 Coordonnées de vecteurs

Définition 12.

Dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Lire les coordonnées des vecteurs de la figure ci-contre :



2.2 Repère cartésien

Définition 13.

On appelle **base du plan** tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{i}, \vec{j})$ non colinéaires.

Définition 14.

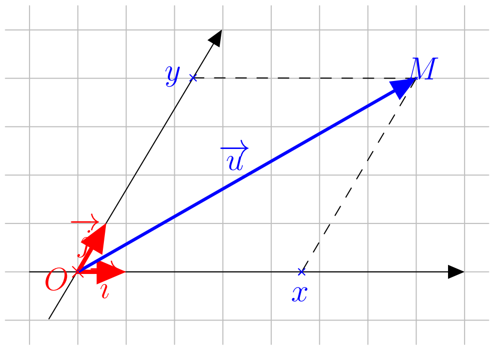
On appelle **repère cartésien du plan** tout triplet $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$ où O est un point du plan et où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base.

- Le point O est **l'origine du repère**.
- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, on dit que $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$ est un repère orthogonal.
- Si en plus $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$, le repère est dit **orthonormal** ou **orthonormé**.
- Les droites passant par O de vecteur directeur respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont appelés axes du repère et sont notés (Ox) et (Oy).

Le plus souvent nous travaillerons avec un repère orthonormé

Remarque

Un repère peut ne pas être orthonormé, mais quelconque comme dans l'illustration ci-contre.
Ici $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Propriété 8.

On considère un repère cartésien $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$.
Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
x et y sont les coordonnées de M dans le repère $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$.

Définition 15.

Dans le repère $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Proposition 2.

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

Soit O, I et J trois points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ alors $(O; I; J)$ est un repère si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Les points O, I et J forment un repère $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$, par définition, OIJ est donc un triangle non aplati. Les points points O, I et J ne sont donc pas alignés et les droites (OI) et (OJ) ne sont pas confondues.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires.

($\Leftarrow$) Si les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (OI) et (OJ) ne sont pas confondues et OIJ est un triangle non aplati ce qui fait de $(O; (\vec{\imath}; \vec{\jmath}))$ un repère du plan.

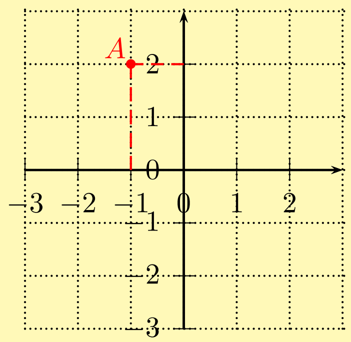
Remarque

On vient de montrer que les définitions de repère affine et cartésien se correspondent en identifiant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, les points et les vecteurs ont alors un même couple de réels pour les repérer.

Coordonnées dans un repère orthogonal

Méthode.

Dans un repère **orthogonal** les coordonnées d'un point se lisent en projetant le point orthogonalement sur l'axe des abscisses pour l'abscisse et sur l'axe des ordonnées pour l'ordonnée.

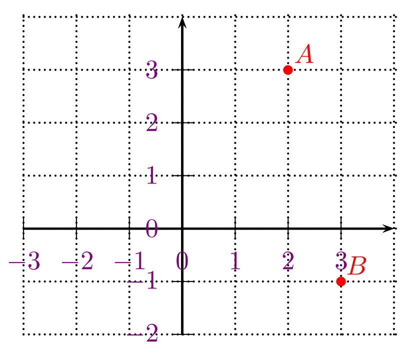


Exemple

On peut lire les coordonnées des points suivants :

$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$



Proposition 3.

On considère les points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration.

On utilise la relation de Chasles avec le point O comme point intermédiaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= -x_A\overrightarrow{i} - y_A\overrightarrow{j} + x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} \\ &= (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

Exemple

Dans le repère $(O; (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}))$, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 3)$.

On a en particuliers $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

Montrons que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est donc un parallélogramme.

Proposition 4.

On considère les points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration.

I est le milieu de $[AB]$. Ainsi, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j}\right) + \frac{1}{2}\left(x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j}\right) \\ &= \frac{x_A + x_B}{2}\overrightarrow{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

Donc $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Exemple

On considère les points $A(2; -1)$ et $B(1; -3)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Et I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2+1}{2}; \dfrac{-1+(-3)}{2}\right)$.

Donc $I\left(\dfrac{3}{2}; -2\right)$

⚠ On remarque que les coordonnées de I ne sont pas la moitié des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

2.3 Repère polaire

Soit θ est un réel, dans le repère orthonormé $(O; (\vec{i}; \vec{j}))$ on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

Exercice 2

Montrer que $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont orthogonaux.

Définition 16.

Le repère $(O; \vec{u}(\theta); \vec{v}(\theta))$ est appelé **repère polaire**.

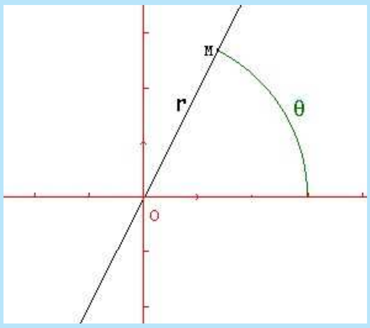
Le point O est appelé **pôle** et la droite orientée $(O, \vec{i})$ **l'axe polaire**.

Proposition 5.

Étant donné un point M du plan, différent de O, il existe un unique couple de réels (r, θ), $r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) = r(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j})$$

Un tel couple est appelé un **système de coordonnées polaires** de M par rapport au repère $(O; (\vec{i}; \vec{j}))$.



Démonstration.

Les coordonnées cartésiennes de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O; (\vec{i}; \vec{j}))$ peuvent s'exprimer grâce à la trigonométrie sous la forme $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Ainsi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\theta)\vec{j} = r(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) = r\vec{u}(\theta)$

Exemple

- Soit $A\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires alors ses coordonnées cartésiennes sont :

  $A\begin{pmatrix} 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 3 \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

- Soit $B\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ coordonnées cartésiennes alors ses coordonnées polaires sont :

  $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \quad \cos(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$

  Finalement $B\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires.

Méthode.

Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

Étant donné un point M du plan munit du repère polaire $(O; \overrightarrow{u}(\theta); \overrightarrow{v}(\theta))$ alors $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta)$ et $M\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$.

Les coordonnées cartésiennes de M sont : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

Étant donné un point M du plan munit du repère cartésien $(O; (\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}))$ alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Première méthode :

Pour un point différent du pôle, on commence par déterminer r : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Puis l'on définit θ modulo 2π par : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$

Deuxième méthode :

Pour un point qui n'est pas sur l'axe des ordonnées, on commence par déterminer θ modulo π par : $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$

Puis l'on définit r par : $r = \dfrac{x}{\cos(\theta)}$

Attention si $r < 0$ alors on prend $|r|$ et $\pi + \theta$ comme coordonnées.

3 Vecteurs du plan

3.1 Opération sur les vecteurs et coordonnées

Le plan est rapporté à un repère $(O; (\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}))$

Proposition 6.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ et α un nombre réel.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $a\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} ax_{\overrightarrow{u}} \\ ay_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$

Démonstration.

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= x_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j} + x_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{j} \\ &= (x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}})\overrightarrow{i} + (y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}})\overrightarrow{j} \end{aligned}$$
- $a\overrightarrow{u} = a\left(x_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j}\right) = ax_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + ay_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j}$

Exemple

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5x\\x+y\end{pmatrix}$ alors :

- $\vec{v}=\vec{w} \iff \begin{cases} 5x = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}1+5\\-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
- $-\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
- $5\vec{v}\begin{pmatrix}5\times 5\\5\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
- $-\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}-1+25\\3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$

3.2 Propriétés des vecteurs

3.2.1 Norme d'un vecteur

Proposition 7 (Expression analytique de la norme d'un vecteur)**.**

Dans le repère **orthonormé** $(O;(\vec{\imath};\vec{\jmath}))$, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est donnée par :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Démonstration.

Considérons l'unique point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et H' le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

On a ainsi $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH'}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ et $OH=x$, $OH'=y$.

Alors le triangle OHM est rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore

$OM^2=OH^2+HM^2$.

En justifiant que $\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{HM}$ (exercice) on a $OH'=HM$.

Ainsi $OM=\sqrt{x^2+y^2}$

Propriété 9.

Dans le repère orthogonal $(O;I;J)$, considèrons les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$.

La distance de A à B (ou longueur du segment AB) est donnée par la formule :

$$d(A;B)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exemple

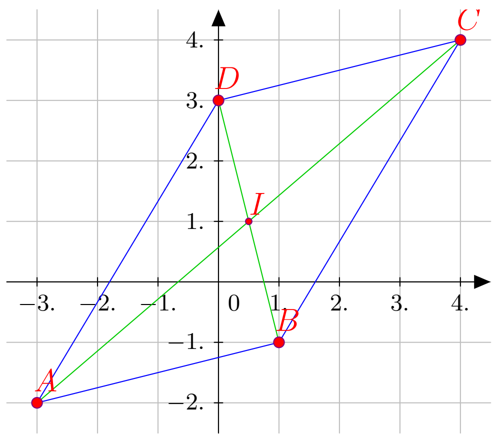
Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère toujours les points $A(-3;-2)$, $B(1;-1)$, $C(4;4)$ et $D(0;3)$.

Quelle est la nature du triangle ABD ?

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DB &= \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}, \end{aligned}$$



$AB = DB$ donc : ABD **est donc un triangle isocèle en** B.

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : ABD **est donc un triangle rectangle isocèle en** B

3.2.2 Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1 et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ -3 sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = -3 \times \overrightarrow{u}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{pmatrix}2 \times 2 = 4\\2 \times 3 = 6 \neq -6\end{pmatrix}$

Proposition 8.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$xy' - x'y = 0$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Si les deux vecteurs sont colinéaires alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x'\\\lambda y'\end{pmatrix}$.
Donc $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$.

- Si l'un des vecteurs est nul, alors la relation $xy' - yx' = 0$ est vérifiée
- Sinon on peut supposer $x \neq 0$ ce qui implique que $\lambda \neq 0$ et $x' \neq 0$ ainsi on a $\dfrac{x}{x'} = \lambda$.
  Si $y = 0$ cela implique $y' = 0$ car $\lambda \neq 0$ et dans le cas contraire on a aussi $\dfrac{y}{y'} = \lambda$
  Ainsi dans tous les cas $xy' = x'y$ ou $xy' - x'y = 0$

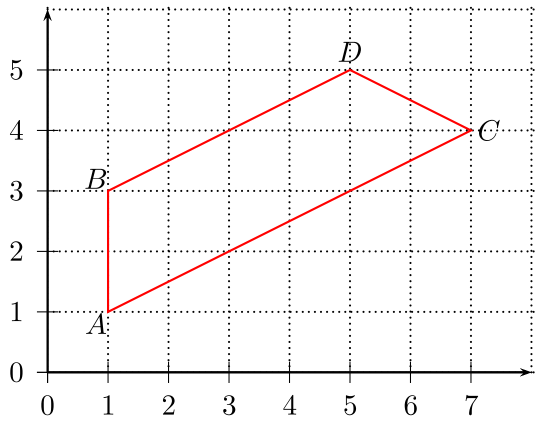
$(\Leftarrow)$ Laisser en exercice

Remarque

Lorsque l'on considère les coordonnées de vecteurs du plan comme des matrices de taille 2×1, on peut alors former avec deux vecteurs une matrice de taille 2×2. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, la quantité $xy' - yx'$ est alors appelée déterminant de la matrice et notée $det(M)$.

Exercice 3

Soient quatre points $A\binom{1}{1}$, $B\binom{1}{3}$, $C\binom{7}{4}$ et $D\binom{5}{5}$ du plan.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?



- $\overrightarrow{AC}\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3}$,
- $\overrightarrow{BD}\binom{5-1}{5-3} = \binom{4}{2}$,
- $XY' - YX' = 6 \times 2 - 3 \times 4 = 0$.
  Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires,
  les droites (AC) et (BD) sont donc parallèles.
- De plus, $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$;
- donc : $\boxed{ABDC \text{ est un trapèze}}$

Définition 17.

Deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **linéairement indépendants** lorsque pour tout réels a, b on a :

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow a = b = 0$$

Proposition 9.

Deux vecteurs non nuls du plan sont linéairement indépendants si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires. En conséquence, deux vecteurs linéairement indépendants forment une base.

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Nous allons procéder par contraposition. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ donc pour $a = 1$ et $b = -\lambda$, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

$(\Leftarrow)$ Ici aussi nous allons procéder par contraposition. Supposons qu'il existe a et b non tous deux nuls tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors :

- Si $a \neq 0$ on obtient $\overrightarrow{u} = -\dfrac{b}{a}\overrightarrow{v}$ et les vecteurs sont colinéaires.
- Si $a = 0$ alors $b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ce qui n'est possible que si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Remarque

On voit apparaître ici le fait qu'une matrice de taille 2×2, $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, est inversible si et seulement si la quantité $det(M) = xy' - x'y$ est différente de 0 c'est à dire si et seulement si elle est composée de vecteurs linéairement indépendants

Proposition 10.

Dans un repère orthornormé, deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan sont **orthognaux** si, et seulement si

$$xx' + yy' = 0$$

Démonstration.

Considérons les représentants des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ au point O origine du repère. Alors il existe deux points M et M' tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

($\Rightarrow$) Les directions de ces vecteurs sont perpendiculaires ainsi d'après le théorème de Pythagore, $MM'^2 = OM^2 + OM'^2$.

Or $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$, ainsi $MM' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Alors $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$.

En développant et réduisant on obtient : $-2(xx' + yy') = 0$ soit $xx' + yy' = 0$

($\Leftarrow$) Laisser en exercice

3.2.3 Équation paramétrique de droites dans le plan

Définition 18.

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est une droite vectorielle.

$(A; \overrightarrow{u})$ est un repère de cette droite. On dit que la droite est dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Équations paramétriques d'une droite

On considère une droite (AB).

La droite vectorielle lui correspondant est donc l'ensemble $\{\lambda\overrightarrow{AB}; \lambda \in \mathbb{R}\}$. On peut décrire la droite qui passe par les points A et B en paramétrisant les coordonnées de ses points par λ de cette façon :

On considère un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui appartient à la droite. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

En passant aux coordonnées, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A & = & \lambda(x_B - x_A) \\ y - y_A & = & \lambda(y_B - y_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \lambda(x_B - x_A) & + & x_A \\ y & = & \lambda(y_B - y_A) & + & y_A \end{cases}$$

Remarque

Cette méthode se généralise aux droites de l'espace c'est à dire avec des coordonnées de vecteurs ou de points à trois paramètres.

Exemple

Donner l'équation paramétrique de la droite passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x & = & \lambda(4-1) & + & 1 \\ y & = & \lambda(5-2) & + & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 3\lambda & + & 1 \\ y & = & 3\lambda & + & 2 \end{cases}$$

`Une droite possède une infinité d'équations paramétriques`

Deuxième partie

Calcul vectoriel dans l'espace

4 Vecteurs coplanaires

Définition 19.

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont dans un même plan.

Proposition 11.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

Démonstration.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
On considère les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.

($\Rightarrow$) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en O. Les points O, A et B ne sont pas alignés.
On note R le projeté de C sur (OA) parallèlement à (OB). $R \in (OA)$ donc les points O, A et R sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
Par construction, les droites (RC) et (OB) sont parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{RC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc colinéaires. Il existe alors un réel μ tel que $\overrightarrow{RC} = \mu\overrightarrow{OB}$.
Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

($\Leftarrow$) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, donc $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est un repère du plan (OAB).
Soit le point E du plan (OAB) de coordonnées $(\lambda; \mu)$ dans ce repère. On a $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$.
Or, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ et comme O, A, B et C sont coplanaires alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ le sont également.

Méthode.

On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est un parallélogramme $ABCD$. Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Pour démontrer que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, il suffit de déterminer les réels λ, μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$

Pour cela, on décompose le vecteur $\overrightarrow{w}$ en utilisant le fait que $ABCD$ est un parallélogramme et la relation de Chasles.

On a $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$. Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. On a alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ donc les vecteurs sont coplanaires.

Définition 20.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace et a, b et c trois réels.

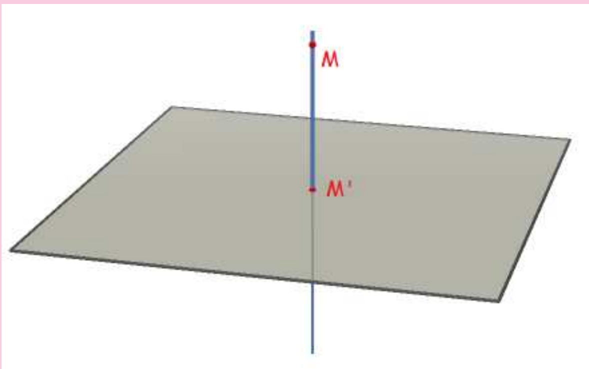
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dits **linéairement indépendants** lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow a = b = c = 0$.

On appelle alors **base de l'espace** la donnée de trois vecteurs linéairements indépendants.

5 Projeté orthogonal sur un plan

Définition 21.

Soit M un point et P un plan de l'espace, on appelle **projecté orthogonal de M sur P** le point M' tel que pour toute droite $(d) \in P$ telle que $(d) \cap (MM') \neq \varnothing$ alors (d) et (MM') sont perpendiculaires



Proposition 12.

Le projeté orthogonal du point M sur le plan P est le point de P le plus proche de M

Démonstration.

La démonstration est essentiellement la même que dans le plan en considérant des sphères à la place des cercles.

Définition 22.

Un plan tangent à une sphère est un plan ayant un seul point commun avec la sphère.

Propriété 10.

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre O. Si $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au rayon $[OA]$.

6 Repères de l'espace

6.1 Repère affine

De la même manière que dans le plan, on définit un repère dans l'espace nous permettant de repérer les points.

Définition 23.

On appelle **repère affine** de l'espace, un trièdre $OIJK$ non aplati dans lequel :

- O est appelé **origine** du repère,
- la droite graduée (OI) est appelée **axe des abscisses**,
- la droite graduée (OJ) appelée **axe des ordonnées**.
- la droite graduée (OK) appelée **hauteur**.

On note ce repère $(O; I; J; K)$.

Définition 24.

Lorsque les triangles OIJ, OIK, OJK sont rectangles en O, le repère est **orthogonal**
Lorsque de plus, $OI = OJ = OK = 1$ on parle de **repère orthonormé**.

Proposition 13.

On munit l'espace d'un repère $(O; I; J; K)$.

Chaque point M du plan est repéré par un couple unique de nombres $M(x; y; z)$ appelé coordonnées du point. x est l'**abscisse** du point, y est l'**ordonnée** du point et z est la **côte** ou **hauteur** du point.

Propriété 11.

Dans un repère quelconque $(O; I; J; K)$, on considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$, et $B(x_B; y_B; z_B)$.

Si le point $I(x_I; y_I : z_I)$ est le milieu du segment $[AB]$ alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \quad ; \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Définition 25.

Dans le repère $(O; I; J; K)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

6.2 Repère cartésien

Définition 26.

On appelle **repère cartésien de l'espace** tout quadruplet $\left(O; \left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ où O est un point de l'espace et où $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment une base.

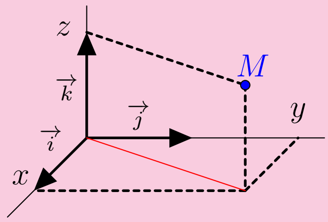
- Le point O est **l'origine du repère**.
- Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux deux à deux, on dit que $\left(O; \left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ est un **repère orthogonal**.
- Si en plus $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$, le repère est dit **orthonormal** ou **orthonormé**.
- Les droites passant par O de vecteur directeur respectifs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont appelés axes du repère et sont notés (Ox), (Oy) et (Oz).

Définition 27.

On considère un repère $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}$.

x,y et z sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$.



Définition 28.

Dans le repère $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$.

Proposition 14.

La donnée d'un point O et de trois vecteurs linéairements indépendants de l'espace est équivalente à celle d'un repère affine.

Démonstration.

Essentiellement la même que dans le plan.

Méthode.

Dans le repère $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ puis montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Que peut-on en déduire ?

1. Chacun des vecteurs est écrit en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$, on détermine donc directement les coordonnées en analysant les coefficients :
$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad$ et $\quad\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
2. Pour montrer que les vecteurs sont linéairement indépendants, on résout le système associé à l'équation vectorielle $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$, on doit obtenir $a=b=c=0$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}\iff\begin{cases}a-b+c=0\\a+b=0\\a+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

3. On applique la définition : Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants. ils forment donc une base de l'espace.

Proposition 15.

Dans le repère $\left(O;\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)\right)$, on considère les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Démonstration.

On utilise la relation de Chasles avec le point O comme point intermédiaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\quad &= -x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}+x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\\ &=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}\end{aligned}$$

Exemple

Dans le repère $(O;I;J;K)$ de l'espace, on a $A\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5\\6+3\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\9\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-5\\2+3\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$
- $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\times(-6)\\-3\times 9\\-3\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-27\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6+2\\9+5\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\14\\-1\end{pmatrix}$

Proposition 16.

Dans le repère $\left(O;\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)\right)$, on considère les points $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$.
Les coordonnées du du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Démonstration.

I est le milieu de $[AB]$. Ainsi, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{1}{2}\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)+\frac{1}{2}\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)\\ &= \frac{x_A+x_B}{2}\vec{i}+\frac{y_A+y_B}{2}\vec{j}+\frac{z_A+z_B}{2}\vec{k}\end{aligned}$$

Donc $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exemple

On considère les points $A(1;-1;2)$ et $B(3;1;-4)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1-(-1)\\-4-2\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$. Et I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{2+(-4)}{2}\right)$.
Donc $I(0;0;-1)$

6.3 Repère cylindrique

On considère un repère cartésien orthonormé de l'espace $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$ et un point avec ses coordonnées dans ce repère $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
Soit θ un réel, on note :

$$\overrightarrow{u}(\theta)=\cos(\theta)\overrightarrow{i}+\sin(\theta)\overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v}(\theta)=-\sin(\theta)\overrightarrow{i}+\cos(\theta)\overrightarrow{j}$$

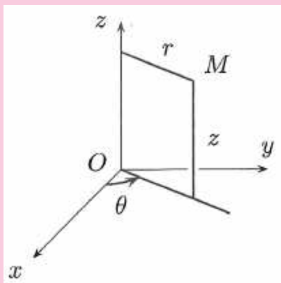
Si P est son projeté orthogonal sur le plan (OIJ) muni du repère orthonormé $(O;(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}))$ et si l'on prend un système de coordonnées polaire (r,θ) de P, on a :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+z\overrightarrow{k}=r\overrightarrow{u}(\theta)+z\overrightarrow{k}$$

Définition 29.

Étant donné un point M de l'espace, on appelle **système de coordonnées cylindriques** de M par rapport au repère $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$ tout triplet (r,θ,z) tel que :

$$\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u}(\theta)+z\overrightarrow{k}$$



Méthode.

Le passage entre coordonnées cartésiennes de l'espace et coordonnées cylindrique se fait avec les méthodes vues pour les repère cartésien du plan et repère polaire en conservant la coordonnée suivant $\overrightarrow{k}$

6.4 Repère sphérique

Soit M un point de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z).

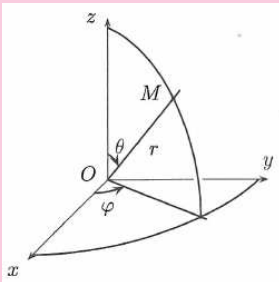
On a $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\varphi) + z\overrightarrow{k}$ et donc $r = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Il existe donc un réel θ tel que $z = r\cos(\theta)$ et $\rho = r\sin(\theta)$ (application de la trigonométrie dans le triangle rectangle). Dans le repère orthonormé $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M vérifient alors :

$$\begin{cases} x &= \rho\cos(\varphi) &= r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y &= \rho\sin(\varphi) &= r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\theta) \end{cases}$$

Définition 30.

Étant donné un point M de l'espace, on appelle **système de coordonnées sphèriques** de M par rapport au repère $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$, tout triplet de réels (r, θ, φ) tel que $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0; 2\pi[$ et :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y &= r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\theta) \end{cases}$$



Si (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphèriques d'un point M :

- Le réel positif r est appelé **rayon**
- Le réel φ est appelé **longitude**
- Le réel θ est appelé **colatitude**

Remarque

- Plus couramment on utilise la **latitude** $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ à la place de la colatitude en particulier dans les coordonnées géographiques.
- Dans le plan $(O, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}(\varphi))$, le point M admet (r, θ) comme couple de coordonnées polaire.
- Un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal de M sur (OIJ) est $(r\sin(\theta), \varphi)$.

Méthode.

Passage des coordonnées sphèriques aux coordonnées cartésiennes

Étant donné un point M de l'espace munit des coordonnées sphérique $M\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$.

Les coordonnées cartésienne de M sont :

$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$; $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$; $z = r\cos(\theta)$

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

Étant donné un point M de l'espace munit du repère cartésien orthonormé $\left(O; \left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Première méthode :

Pour un point différent de O, on commence par déterminer r : $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Puis l'on définit θ modulo π par : $\cos(\theta) = \dfrac{z}{r}$

Finalement on définit φ modulo 2π par : $\cos(\varphi) = \dfrac{x}{r\sin(\theta)}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{r\sin(\theta)}$

On a aussi les formules $\cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Deuxième méthode :

Pour un point qui n'est pas sur l'axe des ordonnées, on commence par déterminer φ modulo π par : $\tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$

Puis on calcule $\rho = \dfrac{x}{\cos(\varphi)}$. Si $\rho < 0$ alors $\varphi = \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sinon $\varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

On détermine r : $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On définit θ modulo π par $\cos(\theta) = \dfrac{z}{r}$

7 Vecteurs de l'espace

7.1 Norme d'un vecteur

Proposition 17 (Expression analytique de la norme d'un vecteur)**.**

Dans le repère **orthonormé** $(O; I; J; K)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Propriété 12.

Dans le repère orthogonal $(O; I; J; K)$, considèrons les points $A(x_A; y_A; z_A)$, et $B(x_B; y_B; z_B)$.

La distance de A à B (ou longueur du segment AB) est donnée par la formule :

$$d(A; B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

7.2 Opération et coordonnées

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)\right)$

Propriété 13.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\\z_{\vec{u}}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\\z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$ et α un nombre réel.

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}\\y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}\\z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $a\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}ax_{\vec{u}}\\ay_{\vec{u}}\\az_{\vec{u}}\end{pmatrix}$

Démonstration.

- $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}\\y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}\\z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=x_{\vec{u}}\vec{\imath}+y_{\vec{u}}\vec{\jmath}+z_{\vec{u}}\vec{k}+x_{\vec{v}}\vec{\imath}+y_{\vec{v}}\vec{\jmath}+z_{\vec{v}}\vec{k}\\&=\left(x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}\right)\vec{\imath}+\left(y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}\right)\vec{\jmath}+\left(z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

- $a\vec{u}=\begin{pmatrix}ax_{\vec{u}}\\ay_{\vec{u}}\\az_{\vec{u}}\end{pmatrix}$

$$a\vec{u}=a\left(x_{\vec{u}}\vec{\imath}+y_{\vec{u}}\vec{\jmath}+z_{\vec{u}}\vec{k}\right)=ax_{\vec{u}}\vec{\imath}+ay_{\vec{u}}\vec{\jmath}+az_{\vec{u}}\vec{k}$$

Méthode.

Dans un repère $\left(O;\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)\right)$, on donne les points $E(-1;3;2)$, $F(2;-1;3)$ et $G(-1;0;1)$.
Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EG}$.

On pose $M(x;y;z)$. On détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EM}$ en fonction de x, y, et z et des coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$. On traduit l'égalité vectorielle de l'énoncé par un système.

On pose $M(x;y;z)$.
On a $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-3\\z-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

D'après l'égalité vectorielle, $\begin{cases}x+1=3\\y-3=-4+2\times(-3)\\z-2=1+2\times(-1)\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=2\\y=-7\\z=1\end{cases}$

7.3 Équation paramétrique de plan

Définition 31.

Soient A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, avec λ et μ des réels, est un plan vectoriel de l'espace.
$(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est un repère du plan. On dit que le plan est dirigé par la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ ou engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Équations paramétriques d'un plan dans l'espace

On considère un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On veut paramétriser les coordonnés des points qui appartiennent au plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ passant par A.
Le plan vectoriel est l'ensemble $\{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
On considère un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui appartient au plan. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
En passant aux coordonnées vectorielle, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - x_A & = & \lambda x_{\overrightarrow{u}} + \mu x_{\overrightarrow{v}} \\ y - y_A & = & \lambda y_{\overrightarrow{u}} + \mu y_{\overrightarrow{v}} \\ z - z_A & = & \lambda z_{\overrightarrow{u}} + \mu z_{\overrightarrow{v}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & \lambda x_{\overrightarrow{u}} + \mu x_{\overrightarrow{v}} & + & x_A \\ y & = & \lambda y_{\overrightarrow{u}} + \mu y_{\overrightarrow{v}} & + & y_A \\ z & = & \lambda z_{\overrightarrow{u}} + \mu z_{\overrightarrow{v}} & + & z_A \end{array}\right.$$

`Un plan possède une infinité d'équations paramétriques`

Exemple

Donner l'équation paramétrique du plan passant par les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On peut considérer les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le point A.

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & = & 3\lambda + 0\mu & + & 1 \\ y & = & 2\lambda + 3\mu & + & 2 \\ z & = & 3\lambda + 0\mu & + & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & 3\lambda & + & 1 \\ y & = & 2\lambda + 3\mu & + & 2 \\ z & = & 3\lambda & + & 3 \end{array}\right.$$

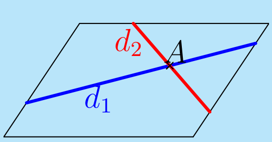
8 Droites et plans de l'espace

8.1 Droites de l'espace

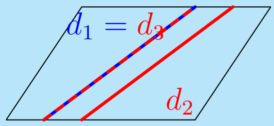
Proposition 18 (Position relative de deux droites)**.**

Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.

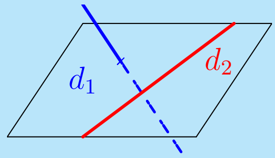
Si elles sont coplanaires, alors elles appartiennent à un même plan. Elles peuvent être sécantes ou parallèles (strictement parallèles ou confondues).



Droites coplanaires sécantes : un point d'intersection



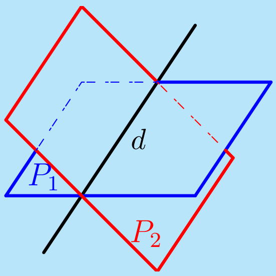
Droites coplanaires parallèles : aucun ou une infinité de points d'intersection



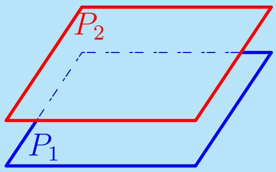
Droites non coplanaires : aucun point d'intersection

8.2 Plans de l'espace

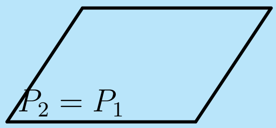
Proposition 19 (Position relative de deux plans)**.**



Plans sécants : une droite d'intersection

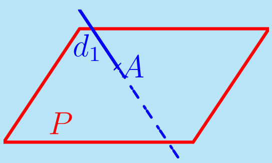


Plans parallèles strictement : aucune intersection

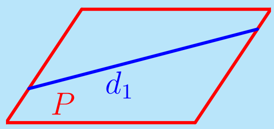


Plans parallèles confondus

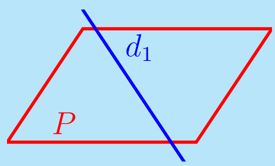
Proposition 20 (Position relative d'une droite et d'un plan)**.**



Droite et plan sécants : un point d'intersection



Droite et plan parallèles : droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles : aucun point d'intersection

9 Parallélisme dans l'espace

9.1 Parallélisme d'une droite et d'un plan

Proposition 21.

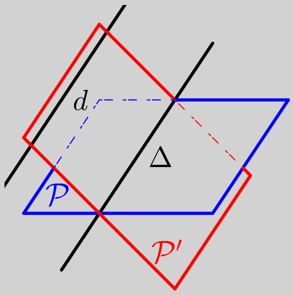
Une droite (d) est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement s'il existe une droite (Δ) de $(\mathcal{P})$ parallèle à (d).

Démonstration.

Le résultat est évident lorsque (d) est incluse dans $(\mathcal{P})$.

Supposons que (d) n'est pas incluse dans $(\mathcal{P})$.

(⇒) : On suppose que (d) est parallèle à $(\mathcal{P})$. Soit un plan $(\mathcal{P}')$, sécant à $(\mathcal{P})$, contenant (d) et contenant un point A de $(\mathcal{P})$. On note (Δ) leur intersection. Les droites (d) et (Δ) sont coplanaires car elles sont incluses dans $(\mathcal{P}')$.



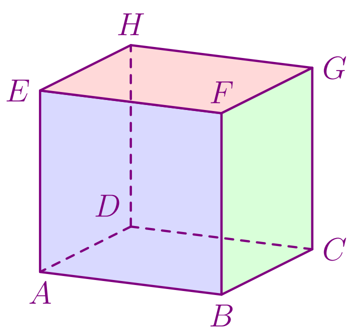
Supposons que (d) et (Δ) sont sécantes en un point B. $B \in (\Delta)$ donc $B \in (\mathcal{P})$. or $B \in (d)$ donc $B \in B \cap (d)$, ce qui est contradictoire avec le fait que (d) et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles. (d) et (Δ) ne sont pas sécantes : elles sont parallèles.

(⇐) : On suppose qu'il existe une droite (Δ) incluse dans $(\mathcal{P})$ telle que $(d)//(\Delta)$. Notons $(\mathcal{P}')$le plan contenant Δ et d et supposons que d et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles. Il existe alors un point R tel que $R \in (d) \cap (\mathcal{P})$.
Ainsi, $R \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}')$, donc $R \in (\Delta)$, ce qui est contradictoire avec le fait que (d) et (Δ) sont strictement parallèles. ainsi (d) et $(\mathcal{P})$ ne sont pas sécants : ils sont donc parallèles.

Exemple

Dans le cube ci-contre, on peux dire que la droite (AC) est paralléle au plan (EFH) car elle est parallè ele à la droite $(EG) \in (EFH)$

Avec la même méthode, on pourra montrer que la droite (AH) est parallèle au plan (BCG), ou encore que la droite (EF) est parallèle au plan (AHG)



9.2 Parallélisme de deux plans

Proposition 22.

Si un plan $(\mathcal{P})$ contient deux droites (d) et (d') sécantes parallèles au plan $(\mathcal{P}')$ alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

Démonstration.

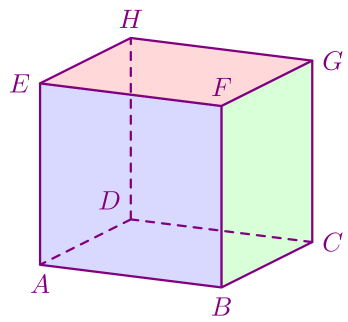
($\Rightarrow$) : Admis

($\Leftarrow$) : Soient (d) et (d') deux droites sécantes de $(\mathcal{P})$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On note (Δ) et (Δ') deux droites sécantes de $(\mathcal{P}')$ respectivement parallèles à $(d$ et (d').
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc une base de $(\mathcal{P})$. Or (d) et (d') sont parallèles à (Δ) et (Δ') donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $(\mathcal{P}')$. Les plans ont donc la même direction et sont donc parallèles.

Exemple

Dans le cube ci-contre, on peux dire que la droite (EG) et (EF) sont sécantes et parallèles aux droites (AC) et (AB). Les plans (EHG) et (ADC) sont donc parallèles.
Avec la même méthode, on pourra montrer que le plan (EAH) est parallèle au plan (FGC), ou encore que le plan (EAF) est parallèle au plan (DHC)



9.3 Parallélisme de deux droites

Proposition 23.

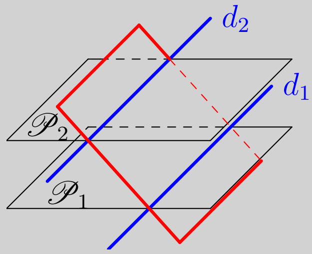
Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles et réciproquement.

Démonstration.

Soit $(\mathcal{P})$ un plan sécant à $(\mathscr{P})$ distinct de $(\mathscr{P})$.

Alors $(\mathcal{P})$ est également sécant à $(\mathscr{P})$ car sinon, on aurait $(\mathcal{P})//(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P})//(\mathscr{P})$ d'où $(\mathcal{P})//(\mathscr{P})$, ce qui est absurde.

On note respectivement (d_1) et (d_2) les droites définies par $(d_1) = (\mathcal{P}) \cap (\mathscr{P})$ et $(d_2) = (\mathcal{P}) \cap (\mathscr{P})$. Ces droites sont incluses dans $(\mathcal{P})$ donc elles sont soit parallèles, soit sécantes.



Si elles étaient sécantes, elles auraient un point d'intersection situé à la fois dans le plan $(\mathbb{P}_{\not\models})$ et dans le plan $(\mathbb{P}_{\not\models})$, ce qui est impossible. Donc d_1 et d_2 sont parallèles.

Proposition 24 (Théorème du toit)**.**

Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans sécants suivant une droite (δ), si $(d_1) \in (\mathscr{P}_1)$ et $(d_2) \in (\mathscr{P}_2)$ sont deux droites parallèles alors la droite (δ) est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

Démonstration.

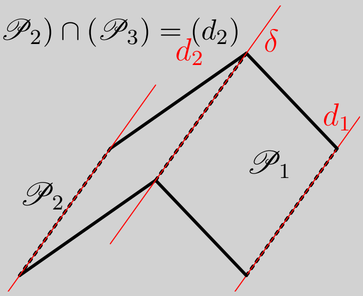
Par hypothèse, les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants, donc leur intersection est une droite (δ) ; et les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles. Donc : $(\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2) = (\delta)$ et $(d_1)//(d_2)$.

Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles donc elles sont coplanaires, il existe un plan $(\mathscr{P}_3)$ qui contient à la fois (d_1) et (d_2). Mais alors (d_1) et (δ) sont contenues dans $(\mathscr{P}_1)$; et (d_2) et (δ) sont contenues dans $(\mathscr{P}_2)$. Donc : $(\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_3) = (d_1)$ et $(\mathscr{P}_2) \cap (\mathscr{P}_3) = (d_2)$

Montrons que $(d_1)//\ (\delta)$:

Supposons que (d_1) et (δ) ne soient pas parallèles, elles sont sécantes en un point A.

Comme $A \in (d_1) \cap (\delta)$ donc $A \in (d_1)$ et $A \in (\delta)$.



- $A \in (d_1)$ et $(d_1) = (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_3)$ donc $A \in (\mathscr{P}_3)$.
- et $A \in (\delta)$ et $(\delta) = (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2)$ donc $A \in (\mathscr{P}_2)$. Ce qui donne, $A \in (\mathscr{P}_2) \cap (\mathscr{P}_3($.

Par conséquent : $A \in (d_2)$. Et comme $A \in (d_1)$, on en déduit que (d_1) et (d_2) sont sécantes en A. Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse.

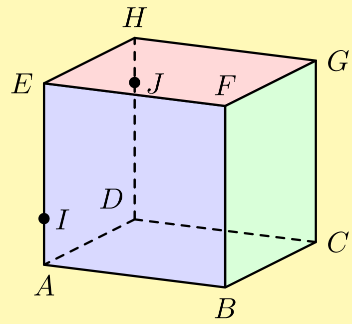
Par conséquent les droites (d_1) et (δ) sont parallèles. Et comme (d_1) et (d_2) sont parallèles, on en déduit que les droites (d_2) et (δ) sont aussi parallèles.

Conclusion : L'intersection de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ est une droite (δ) parallèle à la fois à (d_1) et (d_2).

Méthode.

Soient le cube $ABCDEFGH$ et les points I et J représentés sur la figure ci contre.
Déterminer l'intersection des plans (IJF) et (DCG).

Si deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite. On commence donc par chercher un point commun à ces deux plans ou un théorème à appliquer en fonction des hypothèses données par l'énoncé ou déterminées au cours de la résolution. Les points I et F appartiennent aux plans (ABF) et (IJF) donc la droite (IF) est l'intersection de ces deux plans.



Or le plan (DCG) est parallèle au plan (ABF) car $ABCDEFGH$ est un cube.
Par ailleurs, lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont parallèles. J appartient au plan (DCG) donc $J \in (IJF) \cap (DCG)$. Ainsi, la paralléle à (IF) passant par J est la droite d'intersection recherchée.

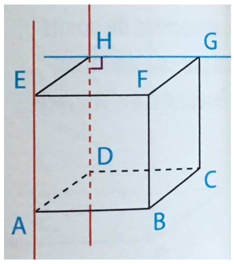
10 Orthogonalité dans l'espace

Définition 32.

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si il existe deux droites qui leurs sont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles.

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, les droites (HD) et (GH) sont perpendiculaires en H. Comme (AE) est parallèle à (HD), les droites (AE) et (GH) sont orthogonales.



Définition 33.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si, soit l'un des deux (au moins) est nul, soit ils sont des vecteurs directeurs de droites orhogonales.

Proposition 25.

Deux $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$

Démonstration.

Même démonstration (à adapter) que dans le cas d'un plan

Définition 34.

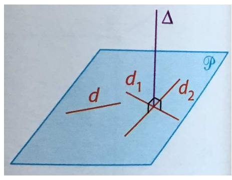
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Propriété 14.

Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Exemple

Δ est perpendicualire à d_1 et à d_2 qui sont incluses dans $\mathcal{P}$ et sécantes donc Δ est orthogoanle à $\mathcal{P}$. d est incluse dans $\mathcal{P}$ donc Δ est orthogonale à d.



d_1 et d_2, perpendiculaires à Δ, ne sont pas parallèles entre elles !

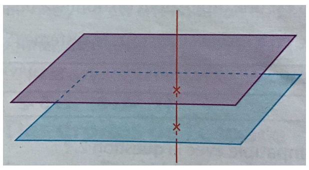
Remarque

— Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est orthogonale à un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

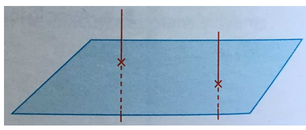
— Par un point donné passe une droite et une seule orthogonale à un plan donné.

— Par un point donné passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée.

— Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.

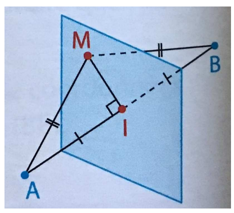


— Deux droite orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.



Définition 35 (Plan médiateur)**.**

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$. Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est aussi l'ensemble des points équidistants de A et B.



Définition 36.

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.