CHAPITRE

3 Géométrie vectorielle

Sommaire

1 Barycentre

Le barycentre est un point mathématique (géométrie analytique) construit à partir d'un ensemble d'autres. Il correspond en statistiques à la notion de moyenne, en physique (cinématique, mécanique du point) à la notion de centre d'inertie (ou centre de masse) ou de centre de gravité, et en mécanique du solide à la notion de moment (moment d'inertie, moment cinétique), en analyse spatiale au point moyen ou point central. On utilise également ce concept pour la construction de courbes de Bézier.

Historiquement, le barycentre de barus (poids) et centre est initialement le centre des poids. C'est donc une notion physique et mécanique. Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane : « Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré. »

Archimède

Son principe des moments et des leviers lui permet de construire assez simplement le barycentre O de deux points de masses m1 et m2 différentes.

Pour que la balance soit en équilibre, il faut que les moments $m1 \cdot O$ *et* $m_2 \cdot OB$ *soient égaux. Si par exemple la masse m1 est 4 fois plus importante que la masse m2, il faudra que la longueur* OA *soit 4 fois plus petite que la longueur* OB*. Cette condition se traduit de nos jours par l'égalité vectorielle* $m1 \cdot \overrightarrow{OA} + m2 \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

C'est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Son travail est prolongé par celui de Paul Guldin (1635/1640) dans son traité Centrobaryca et celui de Leibniz à qui l'on doit la fonction vectorielle de Leibniz.

La notion de centre d'inertie G pour un système non solide est une notion dégagée par Christiaan Huygens (1654), lors de l'établissement de sa théorie des chocs : même s'il sait que $P = P_0$*, il n'est pas évident pour lui que G ira à vitesse constante. En particulier au moment de la percussion, où des forces quasi-infinies entrent en jeu, avec éventuellement bris de la cible, G n'en continue pas moins imperturbé son mouvement : cela paraît mirifique à Huygens, qui ne connaît pas encore le calcul différentiel. C'est alors qu'il énonce le principe de mécanique : « Le barycentre d'un système matériel se meut comme si toute la masse du système y était transportée, les forces extérieures du système agissant toutes sur ce barycentre. »*

On peut remarquer le glissement subtil entre barycentre, centre des poids (= centre de gravité) comme le voyait Archimède et barycentre, centre des masses (= centre d'inertie).

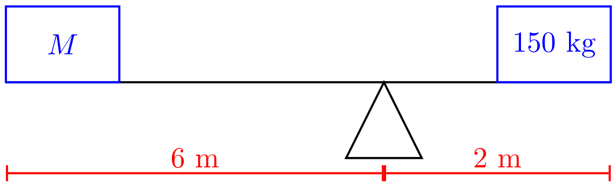
Source : https://www.techno-science.net/definition/1300.html

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de barycentre et son utilisation dans la décomposition de vecteurs
- Construire le barycentre de deux, trois points
- Utiliser les barycentres partiels
- Déterminer un centre de gravité dans un système fini de points pondérés

Exercice de motivation :

Sachant que la balance suivante est en équilibre, quel est le poids de M ?



1.1 Barycentre de deux points pondérés

Définition 1.

On appelle **barycentre** de deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ le point G tel que :

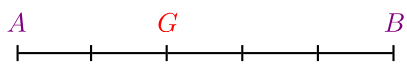
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

On note parfois $G = bar\left\{(A, \alpha), (B, \beta)\right\}$

Exemple

Soit $[AB]$ un segment, construire le barycentre G de $(A, 3)$ et $(B, 2)$

- Le point G vérifie : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
- Grâce à la relation de Chasles, on obtient :
  $3\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$
  $5\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



Remarque

— *Physiquement, G est le point d'équilibre de la balance $[AB]$ munie des masses α et β*

— *Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs*

— *En mécanique, le barycentre peut aussi s'appeler le* ***centre d'inertie****, le* ***centre de gravité*** *ou le* ***centre de masse***

Pour toute la suite, on se place dans le cas où $\alpha + \beta \neq 0$

Cas particuliers :

— Si $\alpha = \beta$, G s'appelle **l'isobarycentre** du système : c'est le milieu du segment $[AB]$

— Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$,on a $\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ d'où $G = B$

— Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$,on a $\alpha\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ d'où $G = A$

Exemple

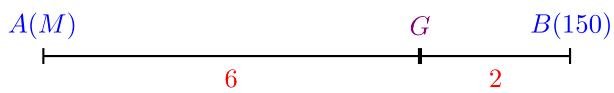
Solution de l'exercice de motivation :

- $M\overrightarrow{GA} + 150\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
- Or, $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GB}$ donc :

  $-3M\overrightarrow{GB} + 150\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

  $(-3M + 150)\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

  $-3M + 150 = 0$
- $M = 50$ kg



1.2 Caractérisations d'un barycentre

Théorème 1.

G est le barycentre des points (A, α) et (B, β) si, et seulement si pour tout M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration.

G est le barycentre des points (A, α) et (B, β) donc, on a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

On utilise la relation de Chasles : $\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0}$

d'où : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Corollaire 1.

G est le barycentre des points (A, α) et (B, β) si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Exemple

On reprend l'exemple 1 : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{2+3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

1.3 Propriétés du barycentre

Propriété 1.

Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.

Exemple

Soit G le barycentre des points $\left(A, \frac{3}{4}\right)$ et $\left(B, -\frac{1}{2}\right)$, alors :

- G est le barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, -2)$
- G est le barycentre des points $(A, -300)$ et $(B, 200)$

On se place dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

Propriété 2 (Coordonnées du barycentre dans le plan)**.**

- Le barycentre de deux points (distincts) (A, α) et (B, β) appartient à la droite (AB)
- Le barycentre de deux points (A, α) et (B, β) a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$

`Attention, rappelez-vous que` $\alpha + \beta \neq 0$

Exemple

Soient $A(1; 3)$ et $B(4; 1)$. Calculer les coordonnées de G, barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 2)$

- $G\left(\frac{-1 \times 1 + 2 \times 4}{-1+2} ; \frac{-1 \times 3 + 2 \times 1}{-1+2}\right)$
- $G(7 ; -1)$

1.4 Barycentre de 3 points et plus

Définition 2.

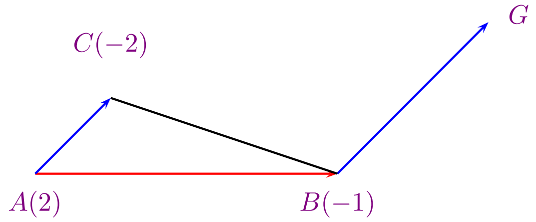
On appelle **barycentre** de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Exemple

Soient A, B et C, trois points du plan. Construire barycentre G de $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, -2)$

- Le point G vérifie : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
- Grâce à la relation de Chasles, on obtient :
  $2\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$
  $-\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$



Théorème 2.

G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ si et seulement si

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

Exemple

Construire le barycentre précédent en utilisant le théorème 3

- On choisit par exemple $M = A$ et on obtient :
- $2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = (2 - 1 - 2)\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Corollaire 2.

G est le barycentre des points (A, α) et (B, β) et (C, γ) si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

Propriété 3 (Coordonnées du barycentre dans l'espace)**.**

- Le barycentre de trois points (distincts) (A, α), (B, β) et (C, γ) appartient au plan (ABC)
- Le barycentre de trois points (A, α) , (B, β) et (C, γ) a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$

`Attention, rappelez-vous que` $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Remarque

La formule de calcul des coordonnées d'un barycentre se généralise à un nombre fini quelconque de points en prenant garde à la somme des poids de chaque point.

Isobarycentre de trois points A, B, C

Cherchons l'isobarycentre de trois points A, B et C : c'est le point G défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

Soit I le milieu de $[AB]$. C'est l'isobarycentre de A et B, donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$;

D'après la relation de Chalses, $\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{0}$

Donc $3\overrightarrow{GI}+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$

Finalement $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$

G est donc sur la médiane $[IC]$ du triangle ABC, situé au tiers de la médiane à partir de I ou aux deux tiers à partir de C : c'est le centre de gravité du triangle ABC.

En reprenant cet exemple on peut écrire : $\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

Donc $2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$.

D'après la définition du barycentre, G est aussi le barycentre de $(I,2)$ et $(C,1)$ où I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$.

Ainsi pour obtenir le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ on peut remplacer les points pondérés par leur barycentre I affecté de la somme $1+1=2$ de leurs coefficients. Ce procédé se généralise, ainsi on ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre respectif affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Propriété 4 (Associativité)**.**

Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) alors G est aussi le barycentre de (A,α) et $(G',\beta+\gamma)$ où G' est le barycentre de (B,β) et (C,γ).

On peut donc remplacer deux points pondérés d'un système par leur barycentre dit **« partiel »** affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple

Soient A, B, et C trois points, A' le milieu de BC et G le centre de gravité du triangle ABC. Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA'}$

On peut faire la même chose avec les isobarycentres B' de AC et C' de AB.

Le point G est donc à l'intersection des médianes (AA'), (BB') et (CC').

Exemple

Si $G=bar\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$ alors $G=bar\{(G',3),(C,3)\}$ où $G'=bar\{(A,1),(B,2)\}$. Et finalement, on s'aperçoit que G est le milieu de [G'C]

Méthode (Construction d'un barycentre de trois points et plus)**.**

Pour construire G, le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,-1)$ et $(D,4)$,

1. On vérifie qu'il existe (somme des coefficients non nulle)
2. On peut commencer par déterminer G_1, le barycentre partiel de $(A,1)$, $(B,2)$ et G_2 le barycentre partiel de $(C,-1)$, $(D,4)$ (attention à vérifier que la somme des coefficients est non nulle). On a donc $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CD}$
3. On remplace dans le système $(A,1)$, $(B,2)$ par $(G_1, 1+2)$ et $(C,-1)$, $(D,4)$ par $(G_2, -1+4)$, on en déduit que G est aussi le barycentre de $(G_1,3)$, $(G_2,3)$ c'est à dire le milieu de $[G_1, G_2]$.

2 Produit scalaire

Le produit scalaire apparaît assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez **Hamilton** *en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions.* **Peano** *le définit associé à un calcul d'aire ou de déterminant.* **Marcolongo** *et* **Burali-Forti** *le définissent à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire.*
C'est un outil puissant de simplification d'expressions trigonométriques dont les applications sont très nombreuses.
En particulier, il est utilisé en astronomie et en navigation avec notamment la technique de triangulation (technique utilisée par les scientifiques français Méchain et Delambre à la fin du XVIII^e siècle afin de définir le mètre).
On le retrouve également en sciences physiques où il sert notament à calculer le travail ou l'énergie produit par une force sur un objet en mouvement mais aussi en éléctricité, économie, sciences naturelles, médecine. . .
Source : Sésamath

Hamilton

Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion de produit scalaire et ses différentes définitions dans le plan et l'espace
- Calculer une longueur, un angle avec le produit scalaire
- Aborder la projection orthogonale
- Déterminer des équations de droite, de cercle dans le plan
- Déterminer des équations de plan, de sphère dans l'espace
- Étudier les positions relatives de plans dans l'espace
- Calculer une distance d'un point à une droite, à un plan

2.1 Dans le plan

2.1.1 Définition

Définition 3.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le **nombre** défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Rappel : Dans un repère orthonormé la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vaut : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exemple

Soient $\overrightarrow{u}(1;1)$ et $\overrightarrow{v}(3;2)$ deux vecteurs du plan, calculer leur produit scalaire

- $||\overrightarrow{u}||^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
- $||\overrightarrow{v}||^2 = 3^2 + 2^2 = 13$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1+3\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
- $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(25 - 2 - 13) = 5$

Propriété 5.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

On notera parfois $||\overrightarrow{u}||^2 = \overrightarrow{u}^2$.

2.1.2 Expression analytique

On se place dans un **repère orthonormé** du plan $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

Proposition 1.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le réel défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Démonstration.

Dans un repère orthonormé l'expression analytique de la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ donc sa norme est $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}$.

En remplaçant dans la définition du produit scalaire les normes des vecteurs par leurs expressions analytiques (dans un repère orthonormé) on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right)\end{aligned}$$

On développe et on réduit, ainsi :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exemple

Soient $\vec{u}(1;1)$ et $\vec{v}(3;2)$ deux vecteurs du plan, calculer leur produit scalaire

➜ $\vec{u}.\vec{v} = 1\times 3 + 1\times 2 = 5$

Remarque

— *Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors le produit scalaire est nul*

— *La réciproque est fausse : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$*

Exemple

Soient $\vec{i}(1,0)$ et $\vec{j}(1;1)$, on a :

➜ $\vec{i}.\vec{j} = 1\times 0 + 0\times 1 = 0$ et pourtant, ni $\vec{i}$ ni $\vec{j}$ ne sont égaux à $\vec{0}$

Propriété 6.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan alors $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$

2.1.3 Propriétés

Propriété 7.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs et λ est un réel

- Commutativité : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Homogénéité : $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$
- Distributivité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Exemple

Soient A, B et C trois points du plan, simplifier $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}$$

Propriété 8.

Deux vecteurs sont orthogonaux et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

? **Exercice**

Démontrer cette propriété.

Exemple

On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}(3;2)$, $\overrightarrow{v}(-1;\frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{w}(0,-1)$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3\times(-1) + 2\times\frac{3}{2} = 0$

  donc, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux

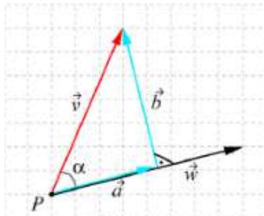
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 3\times 0 + 2\times(-1) = -2$

  donc, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas orthogonaux

2.1.4 Projection orthogonale

Projeté orthogonal d'un vecteur

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons à décomposer $\overrightarrow{v}$ en deux vecteurs : $\overrightarrow{a}$ qui sera parallèle à $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{b}$ qui sera orthogonal à $\overrightarrow{w}$.



Le vecteur $\overrightarrow{a}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{w}$.

Cherchons à exprimer $\overrightarrow{a}$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{b}.\overrightarrow{w}$

Puisque $\overrightarrow{b}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w}$, nous avons $\overrightarrow{b}.\overrightarrow{w} = 0$. De plus, comme $\overrightarrow{a}$ est parallèle à $\overrightarrow{w}$, nous avons $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{w}$, λ étant un scalaire dont nous allons chercher la valeur. Ainsi, l'équation précédente peut se réécrire : $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{w}.\overrightarrow{w} = \lambda||\overrightarrow{w}||^2$.

Ce qui implique que : $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||^2}$.

Donc $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{w} = \dfrac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||^2}\overrightarrow{w}$.

Proposition 2.

Soients $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs non nuls. Le vecteur projection de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{w}$ est :

$$proj_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||^2}\overrightarrow{w}$$

Grâce à la trigonométrie, on peut exprimer la norme de $proj_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{v})$, en fonction de l'angle α. On a la relation suivante : $||proj_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{v})|| = ||\overrightarrow{v}||.|\cos(\alpha)| = ||\overrightarrow{v}||.|\cos(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})|$.

Ainsi $||proj_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{v})|| = ||\overrightarrow{v}||.|\cos(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})| = \left|\left|\dfrac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||^2}\overrightarrow{w}\right|\right| = \dfrac{|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}|}{||\overrightarrow{w}||^2}||\overrightarrow{w}|| = \dfrac{|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}|}{||\overrightarrow{w}||}$.

On obtient l'expression suivante : $|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}| = ||\overrightarrow{v}||.||\overrightarrow{w}||.|\cos(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})|$.

Le signe du produit scalaire ne dépendant alors que de la valeur du cosinus et donc de l'angle, on obtient une nouvelle expression pour le produit scalaire :

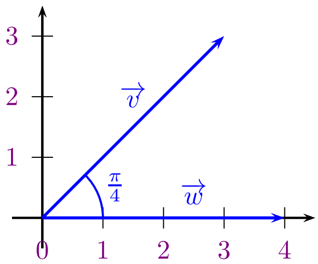
Théorème 3.

$$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{w}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$$

Exemple

Soient $\overrightarrow{w}(4;0)$ et $\overrightarrow{v}(3;3)$ deux vecteurs du plan, calculons leur produit scalaire

- $||\overrightarrow{w}|| = 4$
- $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$
- $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = 45° = \dfrac{\pi}{4}\text{rad}$
- $\begin{aligned} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} &= ||\overrightarrow{w}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) \\ &= 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \end{aligned}$



Méthode.

Lorsqu'on connaît les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}$, on peut calculer leur produit scalaire. Il est alors possible de déterminer le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})$ et ainsi connaître la mesure de l'angle. On a ainsi :

$$\cos(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{w}|| \times ||\overrightarrow{v}||}$$

Une autre façon de faire consiste à utiliser les coordonnées des vecteurs dans une base orthonormée et à procéder de la même manière.

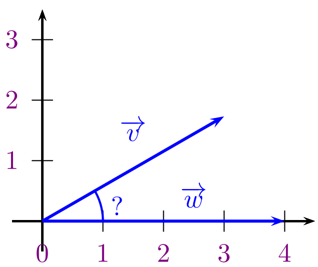
Exemple

Soient $\overrightarrow{w}(4;0)$ et $\overrightarrow{v}(3;\sqrt{3})$ deux vecteurs du plan, calculons l'angle entre ces deux vecteurs.

- $||\overrightarrow{w}|| = 4$
- $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- $||\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}|| = \sqrt{7^2+(\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$
- $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}((2\sqrt{13})^2 - 4^2 - (2\sqrt{3})^2) = 12$

$\cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{w}|| \times ||\overrightarrow{v}||} = \dfrac{12}{4 \times 2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On reconnaît la valeur particulière du cosinus d'un angle de mesure $\dfrac{\pi}{6}\text{rad}$



On ne détermine que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})$ dans $[0;\pi]$

Théorème 4.

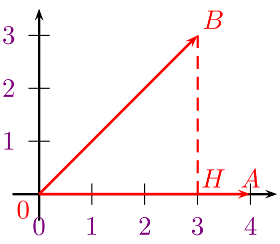
Soient trois points A, B et C et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

- On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$ car $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont orientés dans le même sens.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 4 \times 3 = 12$



2.1.5 Applications du produit scalaire

Équation d'une droite dans le plan

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ on cherche à déterminer une équation de la droite Δ dont la direction est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n}(a; b)$ passant par le point $A(x_A; y_A)$

$M(x; y)$ appartient à la droite Δ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$

On a donc une équation de la droite Δ de la forme :

$$\boxed{\text{Équation d'une droite : } (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0}$$

Remarque

Si l'on développe et réduit l'équation précédente on obtient une équation équivalente de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

Avec $c = -(ax_A + by_A)$

On appelle ces présentations d'une droite ***équation cartésienne d'une droite****.*

Remarque

Étant donné une équation cartésienne de droite $ax + by + d = 0$, *un vecteur orthogonal sera* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(2;1)$, $B(0;1)$ et $C(1;3)$

Déterminer une équation de la droite d passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC)

- $\overrightarrow{BC}(1;2)$
- $M(x;y)$ appartient à la droite d si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$
- $(x-2) + 2(y-1) = 0$
- $d : x + 2y - 4 = 0$

Proposition 3 (Distance d'un point à une droite)**.**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan passant par le point A et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}$.

Soit M un point du plan, alors

$$d(M,(\mathcal{D})) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Démonstration.

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

En utilisant la trigonométrie dans le triangle AHM, on a :

$$d(M,(\mathcal{D})) = HM = AM\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n}}\right)\right| = \frac{||\overrightarrow{AM}||.||\overrightarrow{n}||.\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n}}\right)\right|}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Exemple

Considérons le point $M\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ et calculons sa distance à la droite $(\mathcal{D})$ de l'exemple précédent.

$$d(M,(\mathcal{D})) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-5-2\\4-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+2^2}} = |\frac{(-7)\times 1 + 3\times 2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on cherche à déterminer une équation d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_0;y_0)$ et de rayon $r > 0$.

$M(x;y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$.

On a donc une équation du cercle $\mathcal{C}$ du genre :

$$\boxed{\text{Équation d'un cercle : } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

Exemple

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3;1)$ de rayon 2

- $M(x;y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M^2 = 2^2$
- $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Formules d'Al Kaschi

On considère un triangle ABC quelconque de côtés $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$

Connaissant b et c, peut-on calculer a ?

Proposition 4 (Formule d'Al Kaschi).

On considère un triangle ABC quelconque de côtés $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ avec l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \widehat{A}$. On a la relation suivante :

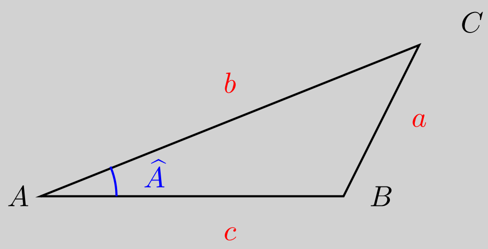
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Démonstration.

$a^2 = BC^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2$

Par la relation du Chasles, on obtient :

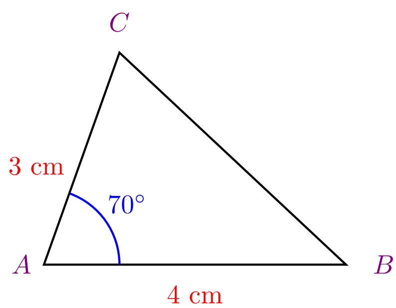
$$\begin{aligned}
a^2 &= ||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 \\
&= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} \\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + ||\overrightarrow{AC}||^2 \\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2||\overrightarrow{BA}||.||\overrightarrow{AC}||\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}) + ||\overrightarrow{AC}||^2 \\
a^2 &= c^2 - 2cb\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + b^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$



Exemple

On considère le triangle ABC de mesures $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $\widehat{A} = 70°$. Calculer BC

- $$\begin{aligned}
BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\times\cos\widehat{A} \\
&= 3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\times\cos(70°) \\
&= 25 - 24\cos(70°) \\
&= 16,79
\end{aligned}$$
- $BC = 4,1$ cm



Relation des sinus

La formule d'Al Kashi est efficace si l'on connaît deux distances et un angle ou 3 distances. Par contre si l'on ne connaît qu'une distance et deux angles, la relation n'est pas utilisable. On utilise alors la relation des sinus.

Proposition 5.

Dans un triangle quelconque ABC, on a les relations suivantes en gardant les mêmes notations et en appelant S la surface du triangle ABC :

$$\mathcal{S} = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2}$$

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

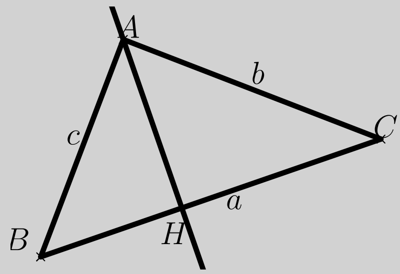
Démonstration.

On a la figure ci-contre où H est le projeté orthogonal de A sur (BC) :

On a alors : $\mathcal{S} = \dfrac{BC \times AH}{2}$ et comme $\sin\widehat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{c}$

$$\mathcal{S} = \frac{ac\sin(\widehat{B})}{2}$$

En utilisant une permutation circulaire sur la surface du triangle, on obtient :



$$\frac{bc\sin\widehat{A}}{2} = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2} = \frac{ab\sin\widehat{C}}{2}$$

en multipliant par 2 et en divisant par a b c, on a

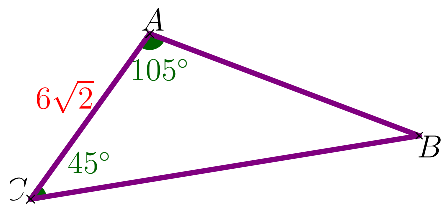
$$\frac{bc\sin\widehat{A}}{abc} = \frac{ac\sin\widehat{B}}{abc} = \frac{ab\sin\widehat{C}}{abc}$$

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

Exemple

Soit le triangle ci-contre. Déterminer la longueur AB et BC. Avec nos notations nous avons alors : $b = 6\sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ et $\widehat{C} = 45°$.

On cherche les longueurs $AB = c$ et $BC = a$.



On détermine l'angle $\widehat{B}$ par complément à 180° :

$\widehat{B} = 180 - 105 - 45 = 30°$

En appliquant la relation des sinus, on a :

$$\frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} \iff c = \frac{b\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{B}} = \frac{6\sqrt{2}\sin 45}{\sin 30} = \frac{6\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12$$

Par permutation circulaire, on trouve : $a = \dfrac{c\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{12 \times \sin 105}{\sin 45} = \dfrac{12 \times \sin 105}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2} \times \sin 105 \approx 16.39$

Formules d'addition et de duplication

Soit $\mathcal{C}$, le cercle trigonométrique de centre O muni d'un repère (O, I, J).

$A\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ sont deux points de ce cercle.

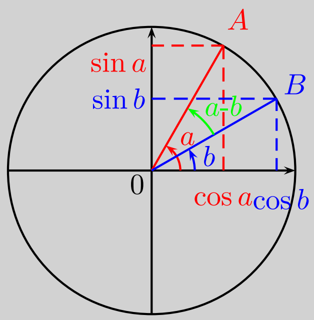
Peut-on établir une formule calculant $\cos(a-b)$ en fonctions du cosinus et du sinus de a et de b ?

Propriété 9 (Formules d'addition)**.**

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$; $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$; $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Démonstration.



En utilisant les formules du produit scalaire et la relation de Chasles des angles orientés :

On a d'une part :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(a-b)$

Et d'autre part :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = x_{\overrightarrow{OB}} \times x_{\overrightarrow{OA}} + y_{\overrightarrow{OB}} \times y_{\overrightarrow{OA}}$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos b\cos a + \sin b\sin a$

On obtient ainsi la première formule.

C'est très bon exercice d'essayer de démontrer les autres. Une indication utile pour le faire :

$\cos((a-b) - \frac{\pi}{2}) = \sin(a-b)$.

Exemple

On peut simplifier l'expression suivante : $f(x) = \cos(5x)\cos(3x) + \sin(5x)\sin(3x) = \cos(5x - 3x) = \cos(2x)$

Exemple

En remarquant que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

➜ $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

En choisissant $b = a$, on obtient les formules de duplication :

Propriété 10 (Formules de duplication)**.**

- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

Essayer de démontrer les autres formules est un bon exercice.

Exemple

En remarquant que $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

➜ $\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1 \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1 \iff \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$

➜ $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} \iff \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4} \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}$

Linéarisation d'expression trigonométrique

Linéariser une fonction trigonométrique, c'est la transformer en une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, k avec k un nombre réel.

Lorsque la fonction est du second degré, on utilise les formules de linéarisation suivantes :

Propriété 11.

$\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

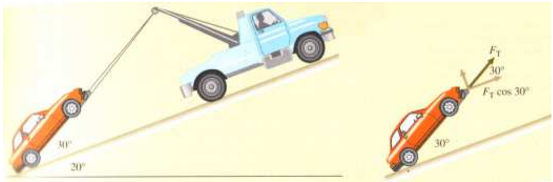
Exemple

L'expression linéarisée de $4\sin^2(3x)$ est $4 \times \dfrac{1 - \cos(2 \times 3x)}{2}$. D'où, $4\sin^2(3x) = 2(1 - \cos(6x))$.

En physique

On retrouve le produit scalaire pour le travail d'une force. En effet le travail W d'une force $\overrightarrow{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{l}$

$$W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{l}$$



Une dépaneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20 degré. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante.

En supposant que le câble fait un angle de 30 degré avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépaneuse sur la voiture si ele la remorque sur une distance de 0,50 km sur cette route en pente.

L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$W = \overrightarrow{F}_T.\overrightarrow{l} = FT \times \cos(30) \times 500 = 1600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 = 400000\sqrt{3} \approx 692,82kJ$$

2.2 Dans l'espace

La première définition du produit scalaire dans la plan se généralise assez naturellement dans l'espace. Mais qu'en est-il des autres ?

Définition 4.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le **nombre** défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient O, A, B trois points tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $(\mathcal{P})$ le plan contenant ces 3 points. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ leur produit scalaire dans le plan $\mathcal{P}$. En particulier, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, on a

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$$

où θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans le plan $(\mathcal{P})$.

Rappel : Dans un repère orthonormé la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vaut : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Proposition 6.

On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le réel :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration.

Vous pouvez démontrer cette proposition en utilisant la même méthode que dans le plan.

Propriété 12.

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur du plan alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2 = x^2+y^2+z^2$

Théorème 5.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (OA) et (OB) sont perpendiculaires
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : on notera $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Exemple

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;3;1)$ et $\overrightarrow{v}(4;1;-7)$, alors

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1\times 4 + 3\times 1 + 1\times -7 = 0$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux

`Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut qu'elles s'intersectent.`

Équation d'un plan dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O;\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)\right)$ on cherche à déterminer une équation du plan (Π) dont la direction est orthogonale au vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$

$M(x;y;z)$ appartient au plan (Π) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

On a donc une équation du plan (Π) de la forme :

$$\boxed{\text{Équation du plan } : (x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b+(z-z_A)\times c=0}$$

Remarque

Si l'on développe et réduit l'équation précédente on obtient une équation équivalente de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

On appelle ces présentations du plan ***équation cartésienne du plan.***

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan détermine les coordonnées d'un vecteur orthogonal à ce plan.

Un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ *aura un vecteur orthogonal, on dit aussi* ***normal*** *lorsque le vecteur est non nul et orthogonal,* $\vec{n}$ *de coordonnées* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple

Dans un repère orthonormé $\left(O;\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)\right)$, on considère les points $A(2;1;1)$, $B(0;1:0)$ et $C(1;3;1)$

Déterminer une équation du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et orthogonal à la droite (BC)

- $\overrightarrow{BC}(1;2;1)$
- $M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$
- $(x-2)+2(y-1)+(z-1)=0$
- $P: x+2y+z-5=0$

Proposition 7 (Distance d'un point à un plan)**.**

Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par A, engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

On a :

$$d(M,(\mathcal{P}))=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AM}|}{||\vec{n}||}$$

Démonstration.

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$. Plaçons nous dans le plan défini par les points A, H et M. Soit θ une mesure de l'angle non orienté $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{MA}\right)$. On a $MH = AM.|\cos(\theta)|$.

Par ailleurs

$$MH = AM.|\cos(\theta)| = \frac{||\overrightarrow{n}||.||\overrightarrow{MA}||.|\cos(\theta)|}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{MA}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Exemple

Considérons le point $M\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ et calculons sa distance au plan $(\mathcal{P})$ de l'exemple précédent.

On a : $d(M,(\mathcal{P})) = \dfrac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}|}{||\overrightarrow{n}||} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1-2\\-4-1\\2-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|1\times(-1)+2\times(-5)+1\times 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

Définition 6.

Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Exemple

Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives $3x+4y-5z=0$ et $\frac{9}{2}x+6y-\frac{15}{2}z+2=0$ sont parallèles.

En effet, leurs vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}4,5\\6\\-7,5\end{pmatrix}$ sont colinéaires (le vérifier)

Définition 7.

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exemple

Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives $3x+4y-5z=0$ et $5x+\frac{5}{4}y+4z+3=0$ sont perpendiculaires.

En effet, leurs vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\1,25\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux (le vérifier)

Propriété 13 (Position relative de plan dans l'espace)**.**

Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans d'équations cartésiennes respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n'}(a',b',c')$ sont donc, respectivement, des vecteurs normaux à $(\mathcal{P})$ et à $(\mathcal{P}')$.

1. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$ et $c=\lambda c'$.
2. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $a=\lambda a'$,$b=\lambda b'$,$c=\lambda c'$,$d=\lambda d'$.
3. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'+cc'=0$

Exemple

Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équation respectives $3x+4y-5z-7=0$ et $6x+8y-10z-14=0$ sont confondus.

Leurs vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}6\\8\\-10\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{n'}=2\overrightarrow{n}$ et $-14=2\times(-7)$

Démonstration.

1. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ce qui se traduit en termes de coordonnées par les 3 égalités ci dessus.
2. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondues si et seulement si, à la fois, ils sont parallèles et si ils ont un point commun $A(x_A, y_A, z_A)$. D'après le point précédent, ceci est équivalent à $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$, $c=\lambda c'$ et $ax_A+by_A+cz_A+d=a'x_A+b'y_A+c'z_A+d'=0$.
   On a $(\lambda a-a)x_A+(\lambda b-b)y_A+(\lambda c-c)z_A-d+d'=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(ax_A+by_A+cz_A)-d+d'=0$
   Et comme A est élément de P, on a aussi $(\lambda-1)(-d)-d+d'=0 \Longleftrightarrow \lambda d=d'$.
3. Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=0$, de quoi découle l'égalité à prouver quand on la retranscrit en coordonnées.

Équation d'une sphère

Dans un repère orthonormé $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$, on cherche à déterminer une équation d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de rayon $r>0$. $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$ si et seulement si $\Omega M^2=r^2$.
On a donc une équation de la sphère $\mathcal{S}$:

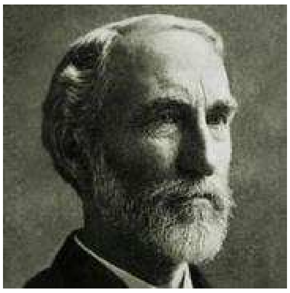
$$\boxed{\text{Équation d'une sphère : } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$$

Exemple

Déterminer une équation d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(3;1;0)$ de rayon 2

- $M(x;y;z)$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$ si et seulement si $\Omega M^2=2^2$
- $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$

3 Produit vectoriel



Josiah Willard Gibbs

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension trois. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Gïunther Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs. En 1843, Hamilton inventa les quaternions qui permettent de définir le produit vectoriel.

Indépendamment et à la même période (1844) Grassmann définissait dans Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik un « produit géométrique » à partir de considérations géométriques ; mais il ne parvient pas à définir clairement un produit vectoriel. Puis Grassmann lit Hamilton et s'inspire de ses travaux pour publier en 1862 une deuxième version de son traité qui est nettement plus claire. De même, Hamilton a lu les travaux de Grassmann et les a commentés et appréciés. Plus tard Maxwell commença à utiliser la théorie des quaternions pour l'appliquer à la physique. Après Maxwell, Clifford modifia profondément le formalisme de ce qui devenait l'analyse vectorielle. Il s'intéressa aux travaux de Grassmann et Hamilton avec une nette préférence pour le premier. En 1881, Gibbs publia Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students of Physics s'inspirant des travaux déjà réalisés notamment ceux de Clifford et Maxwell. Si les physiciens se sont empressés d'utiliser le formalisme de Gibbs, celui-ci ne fut accepté en mathématiques que bien plus tard aprés plusieurs modifications.

Source : `https ://www.techno-science.net/definition/5579.html`

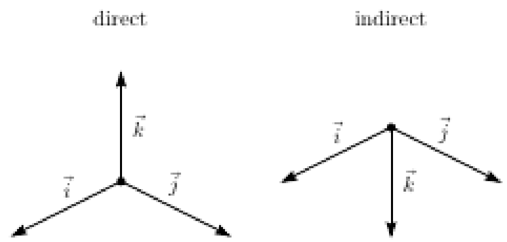
Objectifs du chapitre :

- Aborder la notion d'orientation de l'espace
- Aborder la notion de produit vectoriel et ses propriétés, de produit mixte
- Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires, trois vecteurs sont coplanaires
- Calculer l'aire d'un parallélogramme, d'un parallélépipède.
- Déterminer le système déquations pour une droite dans l'espace
- Calculer une distance d'un point à une droite

3.1 Orientation de l'espace

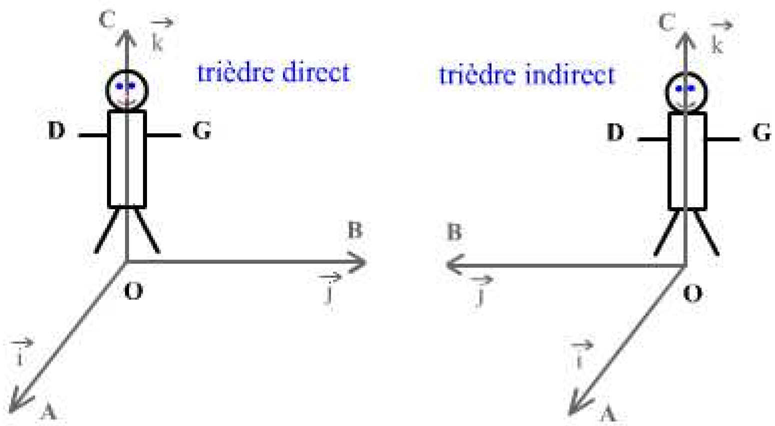
Pour pouvoir définir certaines notions ou résoudre certains problèmes, il est important de savoir orienter l'angle formé par deux vecteurs donnés. Dans le cas du plan, il est facile de fixer cette orientation. Il suffit de décider, entre le sens horaire et le sens trigonométrique, quel sera le sens positif.

Dans le cas de l'espace, les choses sont plus compliquées. Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ de l'espace non colinéaires et nommons $(\mathcal{P})$ le plan vectoriel qu'ils engendrent. Ce plan sépare l'espace en deux demi espaces E_1 et E_2. Supposons que chacune de ces deux parties contient un « observateur » du plan $(\mathcal{P})$ nommé O_1 pour E_1 et O_2 pour E_2. Chacun de ces deux observateurs peut orienter le plan $(\mathcal{P})$ mais le sens trigonométrique pour O_1 correspond au sens horaire pour O_2 et le sens horaire pour O_1 correspond au sens trigonométrique pour O_2. L'orientation d'un plan dans l'espace dépend donc de « la position d'où on l'observe ». Nous allons tout d'abord expliquer ce que signifie orienter l'espace puis nous en tirerons un procédé permettant d'orienter les plans de l'espace.



Il existe plusieurs règles mnémotechniques pour fixer une orientation de l'espace. Parmi celles ci, donnons celle dite « du bonhomme d'ampère ». Considérons $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$ un repère orthonormal de l'espace. Soient I, J et K des points de E tels que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{k}$.

On considère un « observateur » placé les pieds en O, la tête en K et qui a le point I devant lui.



Par convention, on dit que :

Le repère $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ est direct si l'observateur a le point J à sa gauche. On dit aussi que la base $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ est directe.

Le repère $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ est indirect si l'observateur a le point J à sa droite. On dit aussi que la base $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ est indirecte.

Choisir une orientation de l'espace, c'est choisir de travailler avec les repères directs, ou avec les repères indirects. Si on fixe un repère dans l'espace, on choisit une orientation.

Remarque

Considérant une base de l'espace B : Si on échange deux vecteurs de B, on change l'orientation de B. Si on échange un des vecteurs de B avec son opposé, on change l'orientation de B. Si on effectue une permutation circulaire sur les éléments de B on ne change pas son orientation.

3.2 Produit vectoriel

Lemme 1.

Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si l'on a :

$$xy' - yx' = xz' - zx' = yz' - zy' = 0$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ par exemple. Ainsi la proportionnalité suivant chaque coordonnées nous donne la relation souhaitée.

($\Leftarrow$) Si $xy' - yx' = xz' - zx' = yz' - zy' = 0$ alors deux possibilités :

- Si l'un des vecteurs est nul, ils sont colinéaires.
- Sinon on peut supposer que $x \neq 0$ alors la relation $xy' - yx' = 0$ implique que les vecteurs $(x; y)$, $(x'; y')$ sont colinéaires. Il exsite donc un réel λ tel que $(x; y) = \lambda(x'; y')$.

  On procède de même avec la relation $xz' - zx' = 0$ qui implique l'existence de d'un réel μ tel que $(x; z) = \mu(x'; z')$.

  On a donc $\lambda x' = x = \mu x'$ et comme $x \neq 0$ on en déduit que $\lambda = \mu$.

  Finalement $(x; y; z) = \lambda(x'; y'; z')$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Définition 8.

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs de l'espace est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que :

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires,
  - $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$
  - le sens de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est tel que le trièdre $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit de sens direct
  - $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})|$

Proposition 8.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, on a : $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et de normes 1, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée.

Proposition 9.

Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs de norme 1 de l'espace alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée directe
- $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

Propriété 14.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et pour tous réels k, on a :

- Antisymétrie : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
- Distributivité par rapport à l'addition : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$
- Homogénéité : $\overrightarrow{u} \wedge (k\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

⚠ Le produit vectoriel n'est pas associatif : c'est à dire qu'en général $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$ est différent de $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$

Propriété 15 (Expression analytique)**.**

Dans une **base orthonormale directe** $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-xz'\\xy'-yx'\end{pmatrix}$$

Exemple

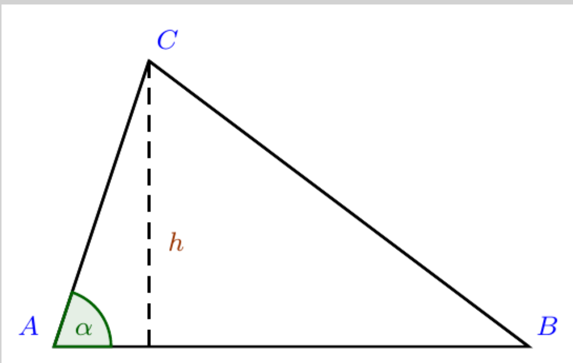
Calculer le produit vectoriel de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix}$

➜ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}3\times(-7)-1\times1\\1\times4-1\times(-7)\\1\times1-3\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\11\\-11\end{pmatrix}$

Proposition 10.

Soit ABC un triangle alors $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$

Démonstration.



Soit H le pied de la hauteur du triangle issue de C alors l'aire du triangle est :

$\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times HC$

Or d'après la trigonométrie dans le triangle AHC rectangle en H,

$HC=AC\times\sin(\widehat{HAC})=AC\times|\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|$

Finalement $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times AC\times|\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|=\dfrac{1}{2}||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$

Proposition 11.

Soit $ABCD$ un parallélogramme alors $\mathcal{A}_{ABCD}=||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$

Démonstration.

L'aire de $ABCD$ est le double de l'aire de ABC.

Proposition 12 (Caractérisation des droites de l'espace)**.**

Un point M de l'espace appartient à une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par A si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration.

Cela découle du fait que M appartient à la droite $(\mathcal{D})$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires soit si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 13.

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs orthogonaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants alors leur intersection est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Démonstration.

Soit A un point de l'intersection des deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$. Si le point M est élément de $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}')$ alors $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n'}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ et M appartient à la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$. Réciproquement, supposons que M appartient à la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n'}$. Comme A est élément des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, nécessairement M est élément de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ et donc de $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}')$.

Représentation cartésienne de droites dans l'espace

Soit $\left(O; \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On se donne des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont non nuls et non proportionnels. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ où $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{n'}(a', b', c')$.

Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

Exemple

Considérons la droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(1,0,1)$ et de vecteurs directeur $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

Alors tout point $M(x,y,z)$ de l'espace appartenant à cette droite vérifie l'équation $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Autrement dit, après calculs $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} y-z+1 \\ z-x \\ x-y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces trois équations se réduisent à deux (non unique) et décrivent parfaitement la droite dans l'espace :

$$\begin{cases} x-y-1 & = & 0 \\ z-x & = & 0 \end{cases},$$

Ces deux équations sont celles de plans dont l'intersection est la droite $(\mathcal{D})$.

Leurs vecteurs normaux respectifs sont $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Proposition 14 (Distance d'un point à une droite)**.**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de l'espace. On a :

$$d\left(M,(\mathcal{D})\right) = \frac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

Démonstration.

Soient H le projeté orthogonal de M sur la droite $(\mathcal{D})$. Soit θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM}\right)$. On a : $AH = AM|\sin(\theta)|$. Par ailleurs, on a $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{AM}||.|\sin(\theta)|$, d'où l'égalité.

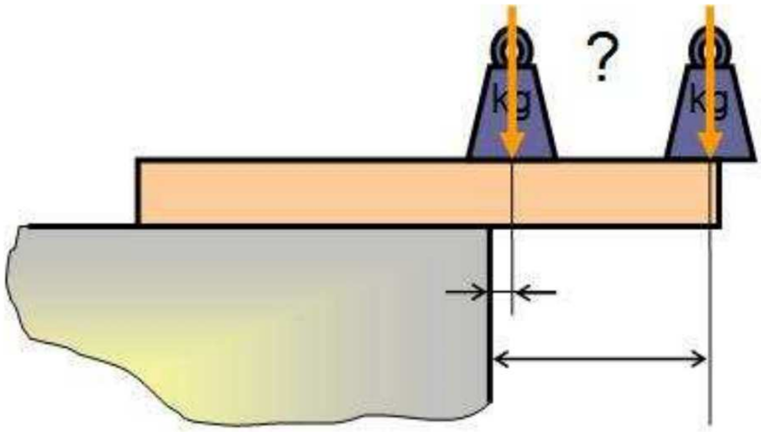
Exemple

Calculons la distance du point $M\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à la droite $(\mathcal{D})$ de l'exemple précédent.

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{||\overrightarrow{u}||} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

Exemple

Soit une planche en équilibre au bord d'un muret. Pour la déséquilibrer, on peut poser une charge sur la partie en porte-à-faux, au-dessus du vide. La capacité de cette charge à faire basculer la planche n'est pas la même suivant qu'elle est posée près du muret ou au bout de la planche. De même on peut, au même endroit, placer une charge plus lourde et constater une différence de basculement. Le « pouvoir de basculement » dépend donc de l'intensité de la force, mais également de la position relative du point d'application de la force, et du point de rotation réel ou virtuel considéré. On intègre ces trois composantes du problème par le modèle de moment d'une force, qui représente l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point donné, qu'on nommera pivot.



Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant au point P par rapport au pivot O, est le vecteur $\overrightarrow{M}_{O/F} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F}$

3.3 Produit mixte

Définition 9.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle **déterminant** ou **produit mixte** de ces trois vecteurs le nombre réel, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ ou $\mathbf{det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, et donné par :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

Méthode (Calcul du produit mixte)**.**

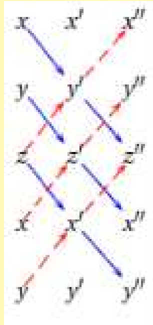
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}v_2w_3 - v_3w_2\\w_1v_3 - w_3v_1\\v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix}\\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(w_3v_1 - w_1v_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\\ &= u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 - u_2w_3v_1 + u_2w_1v_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1\end{aligned}$$

Méthode (Calcul du produit mixte - Règle de Sarrus).

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$

Le moyen mnémotechnique suivant, appelé règle de Sarrus, permet de calculer le déterminant de trois vecteurs assez facilement en additionnant les produits formés le long des flèches bleues et en soustrayant ceux formés le long des flèches rouges.



Exemple

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.Alors :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}(-1)\times 0-1\times 1\\1\times 1-0\times 0\\0\times 1-(-1)\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= 1\times 1+(-2)\times 1+4\times 1 = 1-2+4 = 3\end{aligned}$$

Propriété 16.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors,

- $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$
- Un produit mixte est invariant par permutation circulaire de ses vecteurs : $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$
- Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs : $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]$

Proposition 15.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = 0$

Démonstration.

$(\Longrightarrow)$ Supposons que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires alors par exemple il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w}$ ainsi $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v})$. Or le vecteur $(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v})$ est orthogonal à $\overrightarrow{w}$ donc $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = 0$.

$(\Longleftarrow)$ C'est un bon exercice.

Exemple

On a calculé précédemment le produit mixte des trois vecteurs suivants : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
On a $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=3$, ces trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires et forment donc une base de l'espace.

Exemple

On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant colinéaires on a $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=0$.
Ainsi $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=[\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=0$ et les vecteurs sont bien coplanaires.

Proposition 16.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Notons $\mathcal{V}$ le volume du parallélépipède $\mathcal{P}$ construit à partir de ces trois vecteurs alors $|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|=\mathcal{V}$

Exemple

Le volume du parallélépipède construit à partir de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est $|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|=3$

Équation cartésienne de plan dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O;\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)\right)$ on cherche à déterminer une équation du plan (Π) dont les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base.

$M(x;y;z)$ appartient au plan (Π) si et seulement si $[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=0$

Or, $[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$, notons $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(a,b,c)$ et remarquons que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal au plan (Π) alors : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=(x-x_A)a+(y-y_A)b+(z-z_A)c=0$

On a donc une équation du plan (Π) de la forme :

$$\boxed{\text{Équation du plan } : (x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b+(z-z_A)\times c=0}$$

Remarque

Si l'on développe et réduit l'équation précédente on obtient une équation équivalente de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

On appelle ces présentations du plan ***équation cartésienne du plan****.*