ANNEXE 2

TABLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE À l'USAGE DES AUTOMATICIENS ET ELECTRONICIENS

1 Transformations usuelles - fonctions continues

Toutes les fonctions du temps s'entendent multipliées par l'échelon unité $u(t)$.
Autrement dit, toutes les fonctions sont causales.

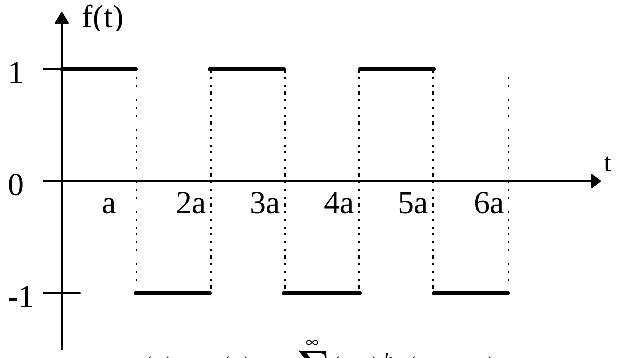
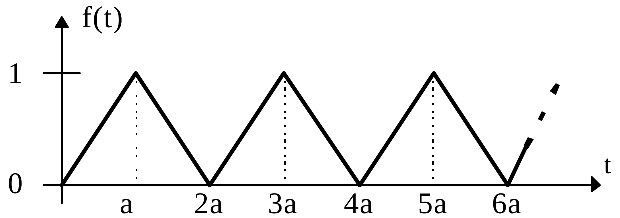
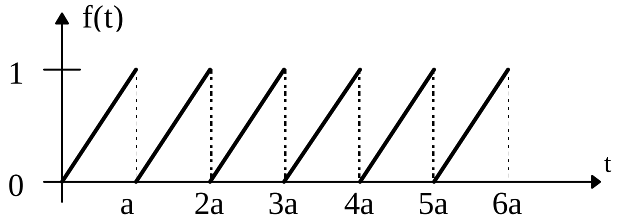
$f(t)$	F(p)
$d(t)$	1
$d^{(n)}(t)$	$p^n \qquad n > 0$
A	$\frac{A}{p}$
$A.t$	$\frac{A}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n entier $n \geq 1$	$\frac{A}{p^n}$
$\frac{1}{T}e^{-t/T}$ $1 - e^{-t/T}$ $t - T + Te^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Tp}$ $\frac{1}{p(1+Tp)}$ $\frac{1}{p^2(1+Tp)}$
$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$ $1 - \frac{1}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}\right)$ $t - (T_1 + T_2) - \frac{1}{T_1 - T_2}\left(T_2^2 e^{-t/T_2} - T_1^2 e^{-t/T_1}\right)$	$\frac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$ $\frac{1}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$ $\frac{1}{p^2(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$

$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$ $\frac{1}{T^2}e^{-t/T}$ $1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-t/T}$ $t-2T+(t+2T)e^{-t/T}$	$\frac{p}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p^2(1+Tp)^2}$
$\frac{w_n^2}{\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.Sin\left(w_n\sqrt{1-x^2}t+q\right)$ $q=p$ - ArcCos$x$ $\frac{w_n}{\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.Sin\left(w_n\sqrt{1-x^2}t\right) \quad 0<x<1$ $1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.\sin\left(w_n\sqrt{1-x^2}t+y\right)$ y = ArcCos$x$ $t-\frac{2x}{w_n}+\frac{1}{w_n\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.Sin\left(w_n\sqrt{1-x^2}t+2y\right)$	$\frac{p}{1+\frac{2x}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2}}$ $\frac{1}{1+\frac{2x}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2}}$ $\frac{1}{p\left(1+\frac{2x}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2}\right)}$ $\frac{1}{p^2\left(1+\frac{2x}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2}\right)}$
$((b-a)t+1)e^{-at}$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$Cos\,at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$Cos(at+j)$	$\frac{pCos\,j-aSin\,j}{p^2+a^2}$
$Sin\,at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$Sin(at+j)$	$\frac{pSin\,j+aCos\,j}{p^2+a^2}$

si $a^2 > b^2$: $\frac{1}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$ avec $\begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ p2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$ si $a^2 = b^2$: te^{-at} si $a^2 < b^2$: $\frac{1}{w} e^{-at} Sinwt$ avec $w = \sqrt{b^2 - a^2}$	$\frac{1}{p^2 + 2ap + b^2}$
si $a^2 > b^2$: $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{e^{p_1 t}} - \frac{1}{e^{p_2 t}}\right)$ avec $\begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ p2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$ si $a^2 = b^2$: $\frac{1}{a^2}\left(1 - e^{-at} - ate^{-at}\right)$ si $a^2 < b^2$: $\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{e^{-at}}{w}\left(aSinwt + wCoswt\right)\right)$ $= \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{be^{-at}}{w} Sin\left(wt + j\right)\right)$ avec $w = \sqrt{b^2 - a^2}$ et $tg j = \frac{w}{a}$	$\frac{1}{\left(p^2 + 2ap + b^2\right)^2}$
$\frac{1}{a} e^{bt} \sin at$	$\frac{1}{(p-b)^2 + a^2}$
$e^{bt} Cos\ at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$
$\frac{1}{a} Sh\ at$	$\frac{1}{p^2 - a^2}$
$Ch\ at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{a} e^{bt} Sh\ at$	$\frac{1}{(p-b)^2 - a^2}$
$e^{bt} Ch\ at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{(c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{p+c}{(p+a)(p+b)}$

$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ctt}}{(a-c)(b-c)}$	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$
$\dfrac{Sin\ at - at\ Cos\ at}{2\ a^3}$	$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
$\dfrac{1}{2\ a}\ t\ Sin\ at$	$\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
$\dfrac{Sin\ at + at\ Cos\ at}{2a}$	$\dfrac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
$Cos\ at - \dfrac{1}{2}at\ Sin\ at$	$\dfrac{p^3}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
$t\ Cos\ at$	$\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
avec $\left\lvert \begin{array}{l} Sin\ ix = +\,i\ sh\ x \\ Cos\ ix = ch\ x \end{array}\right.$	formules en $\dfrac{1}{p^2-a^{2'}}$ changer a en ia
$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left(\sqrt{3}Sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}at - Cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at + e^{-3at/2}\right)$	$\dfrac{1}{p^3+a^3}$
$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left(Cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at + \sqrt{3}Sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}at - e^{-3at/2}\right)$	$\dfrac{p}{p^3+a^3}$
$\dfrac{1}{3}\left(e^{at} + 2e^{-at/2}Cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at\right)$	$\dfrac{p^2}{p^3-a^3}$
$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+a}+\sqrt{p+b}}$
$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{p}}$
$\dfrac{1}{t}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$	$\ln\left(\dfrac{p+a}{p+b}\right)$

2 Transformations usuelles - fonctions discontinues

$f(t)$	$F(p)$
 $f(t)=u(t)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t(t-ka)$	$\frac{1}{p}th\left(\frac{ap}{2}\right)$
	$\frac{1}{ap^2}Th\left(\frac{ap}{2}\right)$
 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t}{a}\left[u(t-ka)-u(t-(k+1)a)\right]$	$\frac{1}{ap^2}\left(1-e^{-ap}-ape^{-ap}\right)\frac{1}{1-e^{-ap}}$