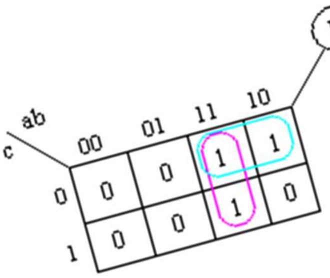
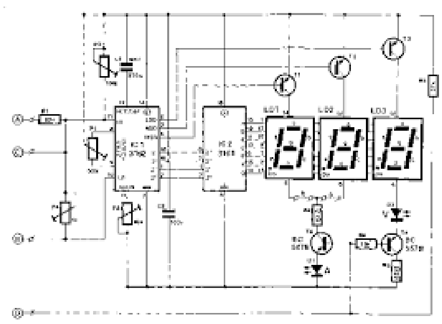
S9 – AUTOMATISMES ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

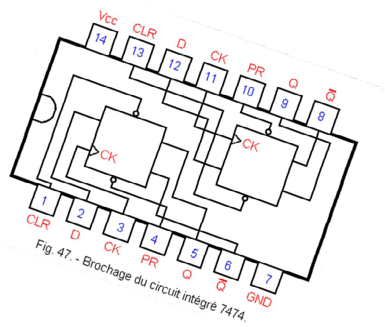
Fascicule 3

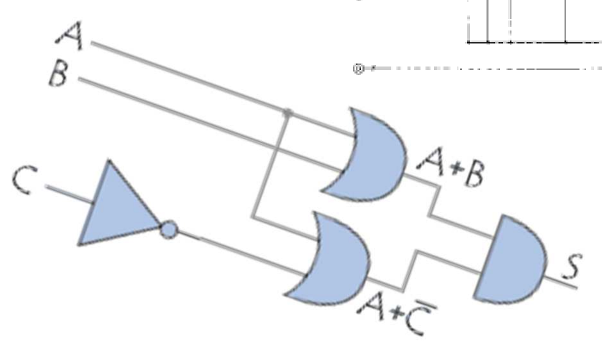
Logique combinatoire

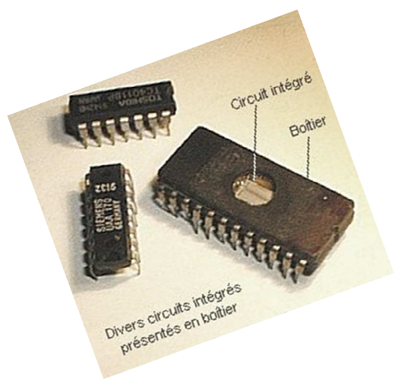
S93











1) Définition de la logique combinatoire

Les parties commandes d'un système automatisé fonctionnent souvent à partir de signaux « tout ou rien ». Les ordres et informations sont donnés sous formes de variables binaires. Ce traitement des données définit la logique combinatoire.

Les types de logique séquentielle et combinatoire présentent deux caractéristiques distinctes :

- Logique séquentielle : l'état de la sortie dépend de la chronologie des événements précédents
- Logique combinatoire : l'état de la sortie dépend de la combinaison des variables d'entrée

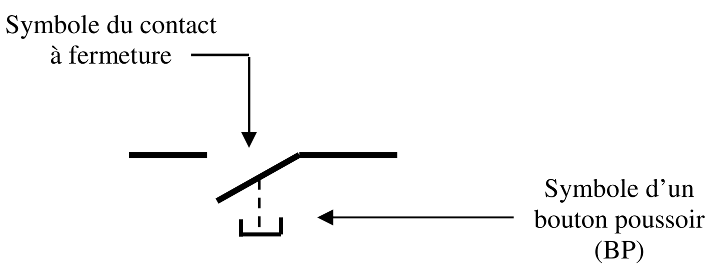
2) Les fonctions logiques

2-1) Conventions et définitions :

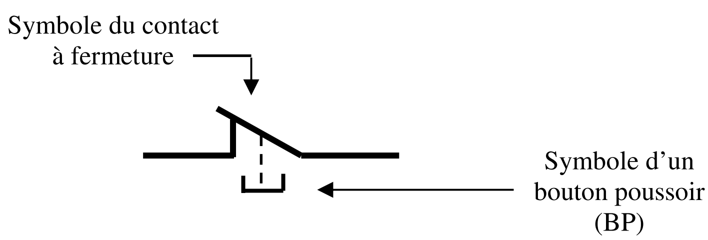
Les contacts :

Lorsque l'on parle d'un contact "c" par exemple, il peut être de deux types :

- Contact à fermeture (normalement ouvert) :
  Principe : lorsqu'il est actionné, il ferme le circuit.
  C'est par exemple l'interrupteur d'une sonnerie de porte



- Contact à ouverture (normalement fermé) :
  Principe : lorsqu'il est actionné, il ouvre le circuit.
  C'est par exemple l'interrupteur de la lumière du réfrigérateur actionné par la fermeture de la porte



Logique combinatoire

Etat d'un contact :

Un contact est à l'état 0 lorsqu'il n'est pas actionné

Un contact est à l'état 1 lorsqu'il est actionné

Etat d'un récepteur :

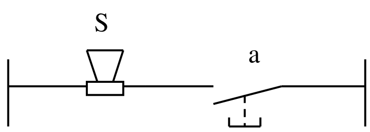
Un récepteur est à l'état 0 lorsqu'il n'est pas alimenté

Un récepteur est à l'état 1 lorsqu'il est alimenté

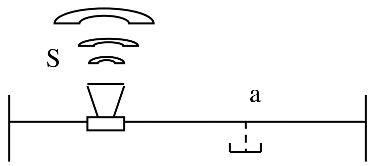
Il faut donc savoir quel type de contact est utilisé pour déduire l'état du récepteur :

Exemples :

Interrupteur de sonnerie :
- Contact : contact à fermeture (normalement ouvert) "a"
- Récepteur : sonnerie S

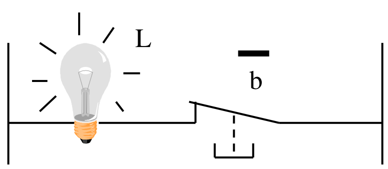


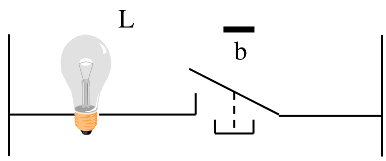
Etat repos (non actionné)
a = 0
pas de sonnerie : S = 0



Etat actionné
a = 1
sonnerie : S = 1

Interrupteur de réfrigérateur :
- Contact : contact à ouverture (normalement fermé) "$\overline{b}$"
- Récepteur : lampe L





Schéma

Etat repos (non actionné)
$\overline{b} = 0$
lampe allumée : L= 1

Etat actionné
$\overline{b} = 1$
lampe éteinte : L= 0

Dans les schémas électriques, lorsque l'on désigne un interrupteur a, il comprend généralement les contacts à ouverture et à fermeture qui sont alors actionnés simultanément.

Chaque contact est alors utilisé en fonction des besoins de l'installation
Le contact à ouverture est alors appelé $\overline{a}$ (prononcé a barre)

Contact "a"

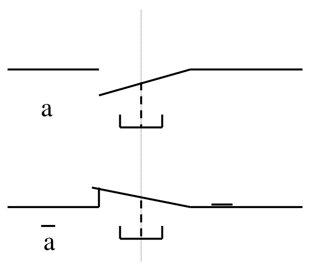
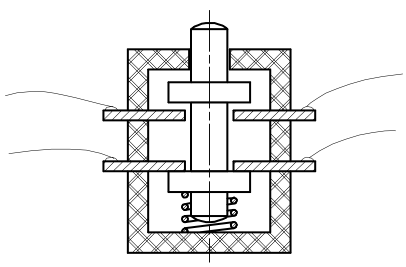


Schéma en coupe du contact a



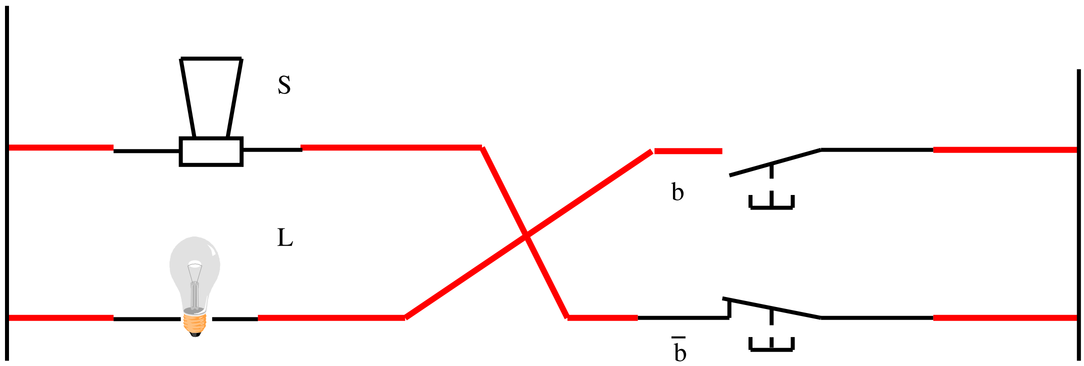
Exemple :

Une lumière est allumée et un buzzer retentit pour signaler une autorisation d'entrée ou non dans un bureau d'une administration

- si la lumière est allumée : entrée interdite
- si la lumière s'éteint et que le buzzer retentit : entrée autorisée

Je veux donner l'autorisation d'entrée (buzzer + lumière éteinte) en ouvrant la porte Quand la porte se ferme (action sur le bouton poussoir b), la lumière s'allume (entretien avec une personne) et le buzzer se tait.

Compléter le câblage correspondant et le tableau sur l'état des capteurs :



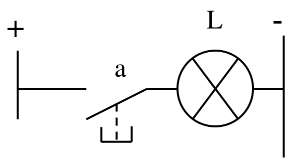
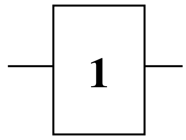
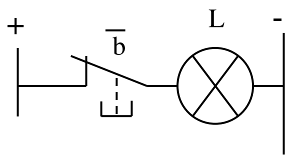
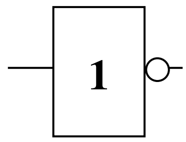
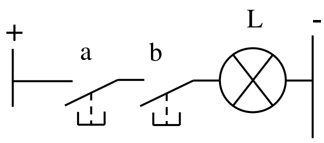
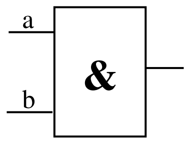
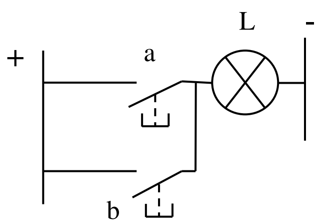
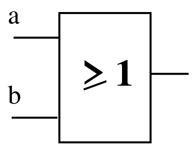
b	L	S
0	0	1
1	1	0

2-2) Les fonctions logiques de base

Elles seront toutes décrites avec :

- une équation logique : permet d'effectuer du calcul logique
- un schéma électrique (symbole électrique)
- un symbole logique
- une table de vérité : représente l'état des récepteurs en fonction de l'état des "contacts"

Logique combinatoire

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Equation logique</th><th>Schéma électrique</th><th>Schéma logique</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>OUI</td><td>L = a</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>L</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">La lampe L, montée en série avec le contact a, s'allume quand a est actionné</td></tr>
<tr><td>NON</td><td>L = $\overline{b}$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>b</th><th>L</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">La lampe L, montée en série avec le contact $\overline{b}$, s'éteint quand b est actionné</td></tr>
<tr><td>ET</td><td>L = a . b</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>L</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">La lampe L s'allume si et seulement si l'on actionne simultanément a et b</td></tr>
<tr><td>OU</td><td>L = a + b</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>L</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">La lampe L s'allume si l'on actionne a ou b ou les deux en même temps</td></tr>
</table>

3) Règles d'algèbre binaire :

Elles servent à simplifier les équations logiques.

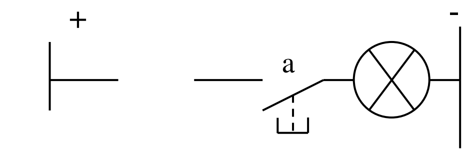
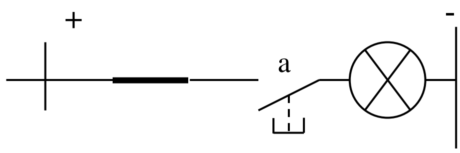
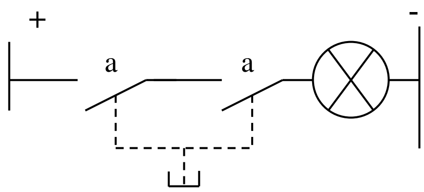
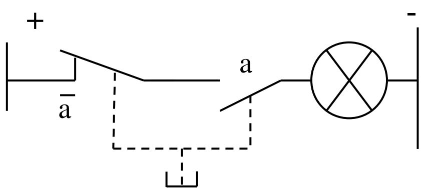
<u>3-1) Commutativité :</u> $a \,.\, b = b \,.\, a \qquad a + b = b + a$

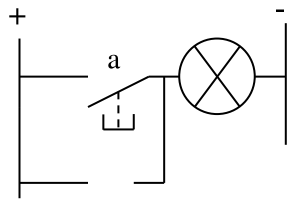
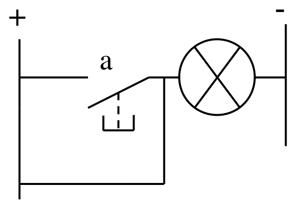
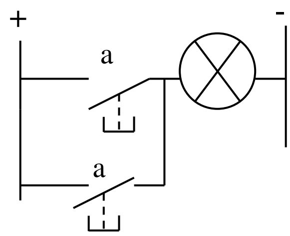
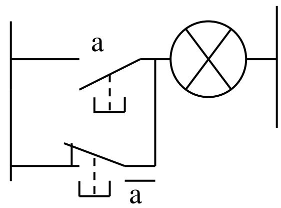
<u>3-2) Associativité :</u>
$a + b + c = (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$
$a \,.\, b \,.\, c = (a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, c) \,.\, b$

<u>3-3) Distributivité de ET par rapport à OU et de OU par rapport à ET</u>

$a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$
$a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$

<u>3-4) Relations particulières :</u>

Relation	Schéma électrique
$a \,.\, 0 = 0$	
$a \,.\, 1 = a$	
$a \,.\, a = a$	
$\overline{a} \,.\, a = 0$	

Relation	Schéma électrique
$a + 0 = a$	
$a + 1 = 1$	
$a + a = a$	
$\bar{a} + a = 1$	

Applications :

a) Simplifier l'équation : $M = (a + b) . (c + \bar{a}) + \bar{b} . \bar{a}$

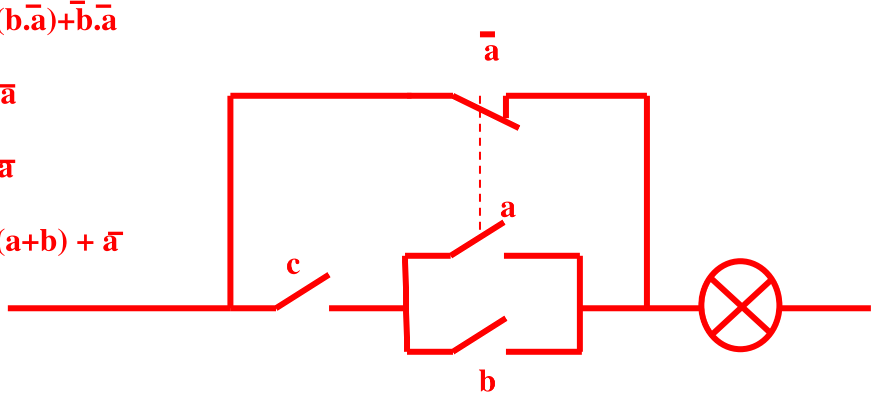
$(a+b).c + (a+b).\bar{a} + \bar{b} . \bar{a}$

$(a.c)+(b.c) + (a.\bar{a})+(b.\bar{a})+\bar{b}.\bar{a}$

$(a.c)+(b.c) + b.\bar{a}+\bar{b}.\bar{a}$

$(a.c)+(b.c) + (b+\bar{b}).\bar{a}$

$(a.c)+(b.c) + \bar{a} = c\,(a+b) + \bar{a}$



3-5) Fonction complément :

On nomme fonction complément, toute fonction qui est toujours égale au contraire de la variable dont elle dépend.

C'est la notion de "variable barre". Ainsi $\bar{x}$ est le complément de x.

Remarque : d'après la définition, $\bar{\bar{x}} = x$

La table des valeurs est bien évidemment la suivante :

x	$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}}$
0	1	0
1	0	1

4) Théorèmes de De Morgan

- Le complément d'une somme logique est égal au produit logique des termes complémentés de cette somme :

$$\overline{a + b} = \bar{a} \; . \; \bar{b}$$

- le complément d'un produit logique est égal à la somme logique des produits complémentés de ce produit :

$$\overline{a \; . \; b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Ces deux théorèmes s'appliquent quel que soit le nombre de termes de la somme ou du produit

Exercice : simplifier l'équation $X = \overline{(c + \bar{d})} \; . \; (d + c)$

$= (\bar{c} \; . \; d) \; . \; (d + c) = c \bar{d} + c \bar{c} \; . \; d d + d c$

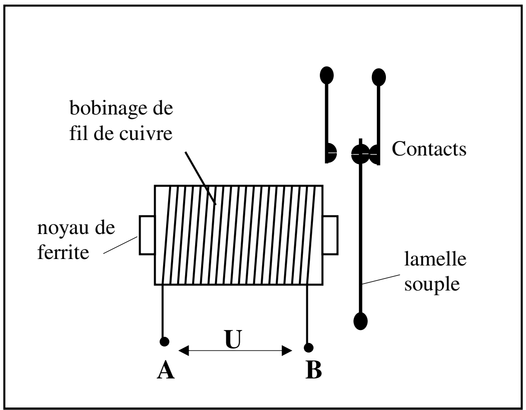
$= c \bar{d} + c \bar{d} + d c = \bar{c} d$

5) Fonctions complémentaires :

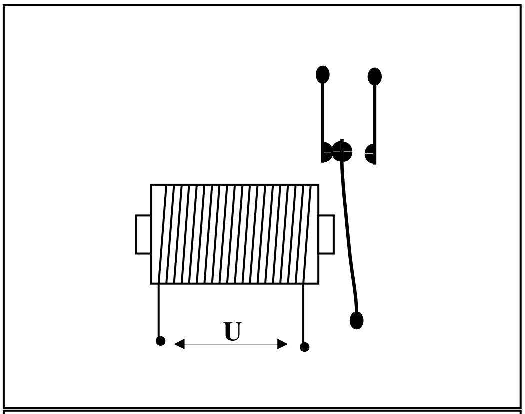
5-1) Le relais :

Le relais est un appareil électrique qui permet de commander un contact

Schéma explicatif :



U = 0



U = 12 Volts

Une bobine (noyau de ferrite entouré d'un bobinage de fil de cuivre) peut être alimentée en courant électrique aux bornes A et B.

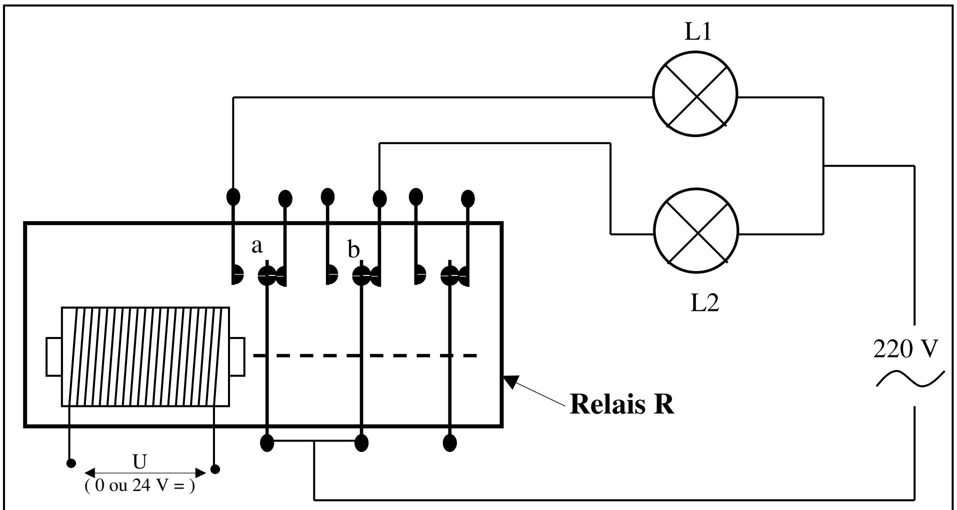
Une lamelle souple sera alors attirée ou non par le champ magnétique généré selon l'état de la bobine.

Selon la position adoptée par cette lamelle souple, des contacts seront fermés ou ouverts.

Remarques :

- On peut mettre plusieurs contacts commandés par la même bobine
- La bobine peut être commandée en faible tension, les contacts peuvent laisser passer des tensions importantes.

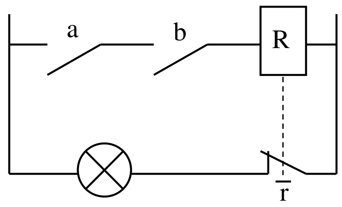
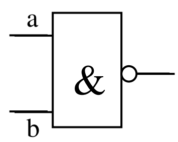
Application : Compléter la table de vérité du schéma ci-dessous :



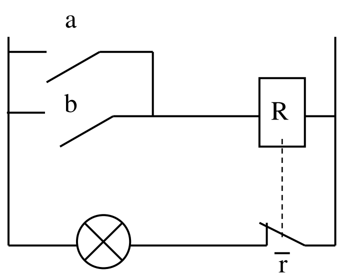
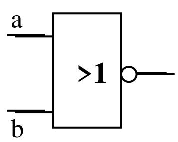
Représentation pour U = 0 volts

R	a	b	L1	L2
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

5-2) Les fonctions :

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Equation logique</th><th>Schéma électrique</th><th>Schéma logique</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>NON ET
NAND</td><td>$L = \overline{a \cdot b}$</td><td>
</td><td>
</td><td>

a	b	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

</td></tr>
<tr><td>NON OU
NOR</td><td>$L = \overline{a + b}$</td><td>
</td><td>
</td><td>

a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

</td></tr>
</table>

Exercice : Schématisez électriquement l'équation ci dessous :

- **sans utiliser de relais**
- **en utilisant un relais**

$$L = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot c$$

6) Simplification des équations : tableaux de Karnaugh

Nous avons abordé la méthode de simplification des équations logiques par l'algèbre booléenne ; cette méthode peut être longue et fastidieuse et devenir rapidement source d'erreurs. La méthode ci-dessous utilise les tableaux de Karnaugh.

6-1) Rappel préalable :

Un nombre décimal se décompose ainsi :

37.508 = 3x10.000 + 7x1000 + 5x100 + 0x10 + 8x1

soit encore 37.508 = $3x10^4 + 7x10^3 + 5x10^2 + 0x10^1 + 8x10^0$

Les nombres binaires (composés de bits 0 ou 1) se décomposent ainsi

1010 0111(binaire) = $1x2^7 + 0x2^6 + 1x2^5 + 0x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$

1010 0111(binaire) = $1x2^7 + 1x2^5 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$

1010 0111(binaire) = $2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

1010 0111(binaire) = 128 + 32 + 4 + 2 + 1

1010 0111(binaire) = 167 (décimal)

Le passage d'une valeur à une valeur immédiatement supérieure ou inférieure nécessite un changement de plusieurs bits. Cela implique la simultanéité d'événement qui n'est pas cohérent d'un point de vue temporelle :

Exemple pour passer de 7 à 8 soit de 111 à 1000 trois bits doivent changer d'état.

6-2) Le code Gray :

Pour palier à cette difficulté, un code Gray a été proposé en ne faisant varier qu'un bit à chaque incrémentation :

Binaire				Gray			
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1

Ce code, appelé aussi binaire réfléchi présentent certaines symétries et sera utilisé dans les tableaux de Karnaugh.

6-3) Méthode des tableaux de Karnaugh :

Prenons immédiatement un exemple :

Soit un système à 4 variables a,b,c et d ; nous pouvons dresser un tableau récapitulatif de toutes les combinaisons possibles :

Marquons les combinaisons des variables en utilisant le binaire réfléchi

a b \ c d	00	01	11	10
00				
01		$\overline{a}\,b\,\overline{c}\,d$		
11				
10				

Ainsi la case 6 correspond à la combinaison $a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$

Une table de vérité classique peut ainsi être transposée dans un tableau de Karnaugh en inscrivant des 1 ou 0 selon l'état de la sortie :

Prenons l'exemple suivant :

a	b	c	d	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0

a	b	c	d	S
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

On peut écrire l'équation logique correspondante :

$$S = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.c.d + a.b.\bar{c}.\bar{d}$$

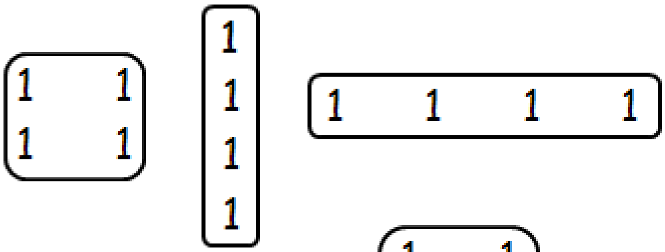
La répartition dans le tableau de Karnaugh est la suivante :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	0	0	1	1

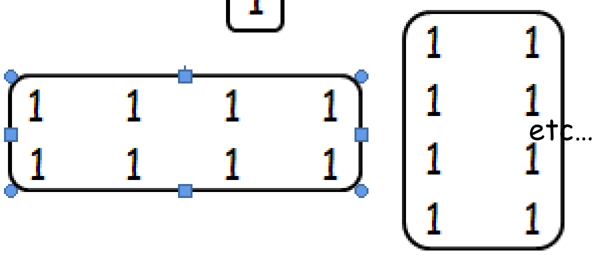
On observe ensuite les groupes de 1 :

- par 2

- par 4



- par 8



- etc..

On peut créer le tableau de Karnaugh :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	0	0	1	1

Dans ces deux solutions pour S=1, les variables nous gardons la combinaison $\bar{c}.\bar{d}$ et b. Seul la variable a change.
Nous pouvons donc affirmer que S = 1 si b=1, c=d=0 qui correspond à la combinaison $b.\bar{c}.\bar{d}$

Je tiens le même raisonnement en prenant l'autre regroupement. Dans ce cas je considère que les cases du haut et du bas sont contigües (de la même façon, celles de droite et de gauche sont considérées contigües)

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	0	0	1	1

On considère ici le groupe de 4.
S = 1 du moment que c=1 et b=0 soit S = $c.\bar{b}$

Tous les regroupements possibles sont traités. Nous aboutissons à une équation logique simplifiée :

$$S = b.\bar{c}.\bar{d} + c.\bar{b}$$

Equation inverse :

On peut mener la même réflexion avec l'état 0 de S :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	0	0	1	1

$$\overline{S} = \bar{c}.\bar{b} + \bar{c}.\bar{d} + b.d + c.b = \bar{c}.(\bar{b}+\bar{d}) + b.(c+d)$$

$$S = \overline{\overline{S}} = \overline{\bar{c}.(\bar{b}+d) + b.(c+d)}$$

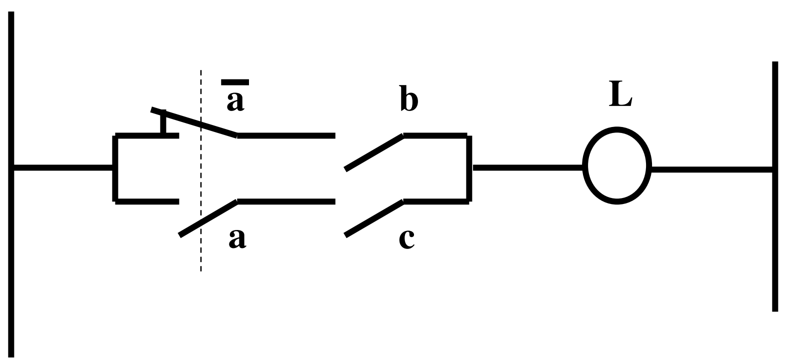
$$= (c + \overline{(b.d)}) . (\bar{b} + \bar{c}.\bar{d})$$

$$= b\bar{c} + b\bar{b}\bar{d} + c\bar{c}\bar{d} + \bar{b}c\bar{d}d$$

$$= b\bar{c} + bc\bar{d}$$

Aléa technologique :

Imaginons le circuit électrique suivant :



On a immédiatement $L = \bar{a} . b + a . c \quad (1)$

Peut-on retrouver cette équation par le tableau de Karnaugh ?

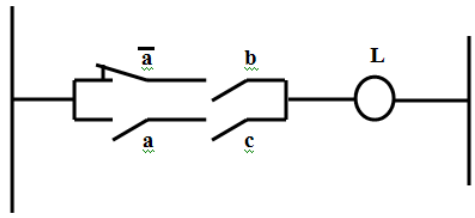
a \ b c	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

On en tire : $L = \bar{a}.b + a.c + b.c$ (2)

Les équations (1) et (2) expriment deux équations différentes pour un même circuit. L'équation (2) est obtenue par chevauchement des regroupements et montre une redondance.

Cette différence montre un aléa technologique :

Observons l'équation (1) : $L = \bar{a} . b + a . c$



Supposons que b = c = 1 ; cela implique L = 1 quelque soit l'état de a

Or il est possible que pendant le temps de commutation de a, on ait (même pendant un cours instant) $a = \bar{a} = 0$ ce qui engendre L = 0 en contradiction avec l'équation (1)

On évitera les aléas technologiques en utilisant la propriété de redondance de l'équation (2) obtenue par chevauchement des regroupements dans le tableau de Karnaugh :

$$L = \bar{a}.b + a.c + b.c$$

7) Cas des fonctions incomplètes :

On rencontre ce cas de figure dans différentes situations :

- Pour certaines combinaisons des variables d'entrée la valeur de la variable de sortie n'a pas de valeur spécifique (elle peut être 0 ou 1).

  Exemple de table de vérité :

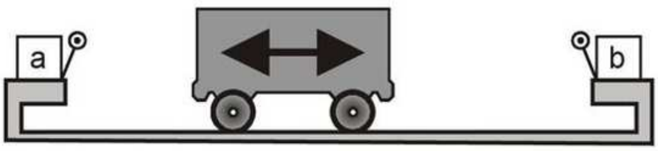
a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0 ou 1
0	1	1	1
1	0	0	0 ou 1
1	0	1	1
1	1	0	0 ou 1
1	1	1	0 ou 1

Pour indiquer la possibilité « 0 ou 1 » on écrira le symbole Ø (ou X)

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	Ø
0	1	1	1
1	0	0	Ø
1	0	1	1
1	1	0	Ø
1	1	1	Ø

- Pour des combinaisons de variables d'entrée sont physiquement impossibles

  Illustration : Un chariot se déplace entre deux butées :



On ne peut avoir a=1 et b=1 en même temps

Nous utiliserons également le symbole « Ø » (ou X) pour les combinaisons physiquement impossibles.

Lorsque nous utiliserons la simplification par tableau de Karnaugh, nous aurons alors la possibilité de sélectionner ou non les symboles « Ø » (ou X) pour faire les regroupements de 1 par puissance de 2 (puisque « Ø » (ou X) peut être associé à 0 ou à 1).

Attention toutefois, on ne pourra générer un regroupement ne contenant que des « Ø »